Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2013 (Szerk: Török Á., Görög P. & Vásárhelyi B.)
Oldalak: 357-363

A rugalmasságtan síkfeladatának megoldása komplex változós függvények segítségével

The Solution of the Elastostatic Plain Problem with the Aid of Complex Functions

Szarka Zoltán
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, Budapest

ÖSSZEFOGLALÁS: A tanulmány a rugalmasságtan síkfeladatának megoldását mutatja be, komplex változós függvényekre vonatkozó peremérték feladatra visszavezetve azt. Az egyensúlyi egyenletekből kiindulva bemutatja, hogy az AIRY-féle feszültségfüggvény biharmonikus, és ez a függvény előállítható két reguláris komplex változós függvény (ún. komplex potenciálok) segítségével. Kihasználva az AIRY-függvény tulajdonságait, ezzel a két függvénnyel előállítja a feszültségeket és az elmozdulást is. A kívánt megoldás előállításához szükséges peremfeltételt a terhelésnek kitett tartomány határán működő, adott erőrendszer ismeretében írja fel (erőmódszer). Ez a peremfeltétel végül nem a feszültségfüggvényre, hanem a két komplex potenciálra vonatkozik. A továbbiakban a feszültségfüggvény már nem játszik lényeges szerepet, bár ez is meghatározható.

Kulcsszavak: Rugalmasságtan, komplex változós módszerek

ABSTRACT: The study presents the solution of the plane problem of elastostatics, reducing it to a boundary value problem for complex functions. Starting from the equilibral equations, it shows that the Airy stress function is biharmonic and can be given with the aid of two regular complex functions (so-called complex potentials). Using the properties of the Airy function, it provides stress and displacement in terms of these two functions.. The boundary condition required for the appropriate solution is taken based on the forces acting at the boundary of the loaded domain (force method). In the end, this boundary condition refers to the two complex potentials instead of the stress function. Afterwards, the stress function does not play an important role, though it can also be determined.

Keywords: Elastostatics, complex functions

1 A FELADAT MEGFOGALMAZÁSA[1]

Ismert, hogy a rugalmasságtan síkfeladatának alap egyenletrendszere, a HOOKE-törvény esetén, a tömegerőt figyelmen kívül hagyva:

Egyensúlyi egyenletek: $$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\,,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}=0\,,\tag{1.1}$$

Geometriai egyenletek: $$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\tag{1.2}$$

Anyagegyenletek: $$\sigma_x=2G\varepsilon_x+\lambda\theta\,,\sigma_y=2G\varepsilon_y+\lambda\theta\,,\tau_{xy}=G\gamma_{xy},\tag{1.3}$$

Az (1.3) alatti anyagegyenleteket szokás fizikai egyenleteknek is mondani, ahol $\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y$, λ az ún. LAMÉ-állandó, $2G$ a csúsztató modulus. Teljesülnie kell még a

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0\,,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tag{1.4}$$

összeférhetőségi (kompatibilitási) egyenletnek is.
A fenti egyenletekben 8 ismeretlen van $(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy},u,v)$, és ezeket kell meghatározni. Jelölje az AIRY-féle (kétváltozós) feszültségfüggvényt: U. Ismertnek tételezzük fel azt, hogy

[1] Jelen cikk a diszken mellékelt teljes cikk rövidített változata, ezért a képletszámozást változatlanul hagytuk

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{1.5}$$

Ezeket a feszültségeket behelyettesítve az (1.4) egyenletbe, a

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = \Delta(\Delta U) = \Delta\,\Delta U \equiv 0$$

azonosságot kapjuk. Ez pedig azt jelenti, hogy *U biharmonikus* függvény, amely előállítható

$$U = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}\right]. \tag{1.10}$$

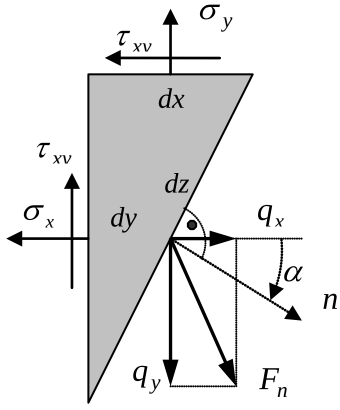
módon, ahol φ és χ tetszőleges reguláris függvények. Az *U* függvény gradiense

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi'(z)}. \tag{1.11}$$

Feladatunkat tehát úgy foglalhatnánk össze, hogy határozzuk meg az (1.10)-ben felírt *U* biharmonikus függvényt. De az (1.10)-ből az is látható, hogy ehhez meg kell határozni a φ és χ komplex változós függvényeket. Ezek ismeretében határozható meg az *U* függvény, ha egyáltalán szükségünk van rá. Mert ne felejtsük el, hogy elsődleges célunk a feszültségek és az elmozdulások meghatározása. Feladatunkat tehát a két reguláris komplex változós függvény (φ és χ) meghatározására vezettük vissza.

2 A PEREMFELTÉTELEKRŐL

A feladat megoldásához nyilván peremfeltétel is szükséges. Ehhez képzeletben vágjunk ki az *S* tartomány széléből egy derékszögű háromszög alakú elemet (*2.1. ábra*). A dz átfogó a határgörbének egy ds hosszúságú vonaleleme ($|dz| = ds$), melynek normálisa legyen *n*, és az *x* tengely irányával bezárt szöge α. A dz átfogóra F_n külső feszültségvektor hat, amellyel a befogókon keletkező $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ feszültségek tartanak egyensúlyt. F_n komponensei legyenek q_x, q_y. Egyensúly akkor áll fenn, ha



2
2.1. ábra

$$\sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha = q_x \text{ és } \tau_{yx}\cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha = q_y. \tag{2.1}$$

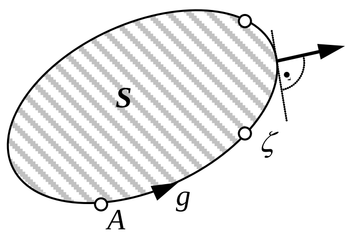
Elvégezve itt a

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \tag{2.2}$$

helyettesítéseket, majd némi átalakítás után az

$$F_n = q_x + i\,q_y = -i\frac{d}{ds}\mathrm{grad}U \tag{2.3}$$

egyenlőséget kapjuk. Képezve ennek a feszültségvektornak az ívhossz szerinti vonal- integrálját a *g* határgörbe *A* és *P* pontja között, az AP ívre ható eredő erőt kapjuk. Jelölje ezt $F = X + iY$. Ekkor



2.2. ábra

$$F = X + iY = \int_g F_n ds = -1\int_g \frac{d}{ds}\mathrm{grad}U\,ds = -i\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right]_A^P$$

.

Itt felhasználtuk az (1.11) egyenlőséget is, és $\psi(z) = \chi'(z)$.

Célszerű a (2.4) formulát

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = iF = f_1 + if_2 \tag{2.5}$$

alakban használni, ahol ζ a g görbe tetszőleges pontja.

Megemlítjük, hogy a g zárt görbére ható eredő erő

$$F = \oint_g F_n(\zeta)ds. \tag{2.6}$$

3 AZ ALAPFORMULÁK ELŐÁLLÍTÁSA

A továbbiakban a feszültségek és az elmozdulások meghatározásához szükséges formulák előállításával foglalkozunk. Ehhez térjünk vissza az előző szakasz (2.1)-(2.4) formuláihoz. Ha itt az ívelem az y tengellyel párhuzamos, vagyis $ds = dy$, akkor az n normális párhuzamos az x tengellyel, $\alpha = 0$, $q_x = \sigma_x$, $q_y = \tau_{xy}$ és $F_n = F_x$. Ennek következtében

$$F_x = \sigma_x + i\,\tau_{xy} = -i\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{grad}U = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)}\,. \tag{3.1}$$

Ha pedig $ds = dx$, akkor n párhuzamos az y tengellyel, így

$$iF_y = \sigma_y - i\,\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{grad}U = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\,. \tag{3.2}$$

A (3.1) és (3.2) összeadásával, ill. kivonásával a

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4\operatorname{Re}\left[\varphi'(z)\right] = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \tag{3.3}$$

ill.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \tag{3.4}$$

egyenlőségeket kapjuk, ahol

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \qquad \Psi(z) = \psi'(z)\,. \tag{3.5}$$

A (3.3)-ból és (3.4)-ből kifejezhetők a feszültségek:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re}\left[2\varphi' - \bar{z}\varphi'' - \psi'\right] = \operatorname{Re}\left[2\Phi - \bar{z}\Phi' - \Psi\right],\\ \sigma_y &= \operatorname{Re}\left[2\varphi' + \bar{z}\varphi'' + \psi'\right] = \operatorname{Re}\left[2\Phi + \bar{z}\Phi' + \Psi\right],\\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im}\left[\bar{z}\varphi'' + \psi'\right] = \operatorname{Im}\left[\bar{z}\Phi' + \Psi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

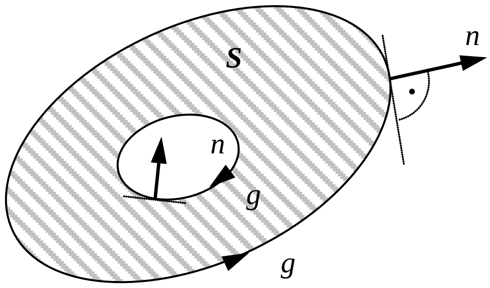
A deformációk következtében keletkező $w = u + iv$ elmozdulás

$$u + iv = \frac{1}{2G}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right], \qquad \kappa = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G}\,. \tag{3.8}$$

4 KÉTSZERESEN ÖSSZEFÜGGŐ VÉGES TARTOMÁNY ESETE

Kétszeresen összefüggő tartomány esetén (*4.1. ábra*) $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ többértékű lehet, mert például a $\varphi' = \frac{1}{4}(P + iQ)$ függvénynél az egyértékű P harmonikus függvény harmonikus társa (a Q függvény) általában többértékű. Ezért legyen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= a\,z\operatorname{Ln}z + a_1\operatorname{Ln}z + \varphi^*(z),\\ \psi(z) &= b_1\operatorname{Ln}z + \psi^*(z) \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$



4.1. ábra

alakú, ahol a, a_1, b_1 állandók, φ^* és ψ^* pedig egyértékű függvények. De az a, a_1, b_1 állandókat meg lehet úgy választani, hogy a többértékűségből eredő kellemetlenségek megszűnjenek. Részleteket illetően az irodalomra utalunk. Azt azonban megemlítjük, hogy

$$\operatorname{Ln}z = \ln z + 2ik\pi\,, \qquad k \text{ egész}\,, \tag{4.2}$$

ahol $\ln z$ a logaritmus függvény fő ága.

Legyen F a g_1 belső görbén ható külső erők eredő vektora. Ekkor

$$a = 0, \qquad a_1 = -\frac{F}{2\pi(1+\kappa)}\,, \qquad b_1 = \frac{\kappa\overline{F}}{2\pi(1+\kappa)}\,. \tag{4.6}$$

választással a (4.1) formulák alakja:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{F}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \varphi^*(z),\\ \psi(z) &= \frac{\kappa\bar{F}}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \psi^*(z),\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

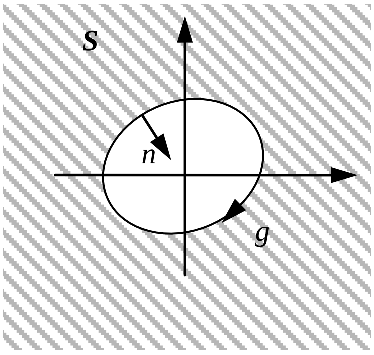
ahol φ^* és ψ^* egyértékű függvények. Ebben az esetben az $u+iv$ elmozdulás is egyértékű lesz.

5 KÉTSZERESEN ÖSSZEFÜGGŐ VÉGTELEN TARTOMÁNY ESETE

Legyen S olyan végtelen tartomány, amely egy zárt g görbe külseje, az origó pedig a g határgörbe belsejében van. (*5.1. ábra*).

A komplex potenciálok szerkezetileg megegyeznek a (4.7)-ben felírt függvényekkel. Itt azonban figyelembe kell venni, hogy a σ_x és σ_y feszültségek korlátosak, így a

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] \tag{5.1}$$



5.1. ábra

összefüggés következtében $\varphi'(z)$-nek is korlátosnak kell lennie az S tartományon, tehát a végtelenben is. Hasonló a helyzet a $\psi'(z)$ függvény esetében is, a

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] \tag{5.2}$$

összefüggés következményeként. Ezeket a (4.7) függvényeknél figyelembe véve, esetünkben

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{F}{2\pi(\kappa+1)}\ln z + \Gamma z + a' + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \dots,\\ \psi(z) &= \frac{\kappa\bar{F}}{2\pi(\kappa+1)}\ln z + \Gamma' z + b' + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \dots .\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

alakú, ahol $\Gamma = B + iC$ $\Gamma' = B' + iC'$ komplex állandók. Az (5.1) és (5.2) össze-függésekből látszik, hogy a' és b' nem befolyásolja a feszültségeket, így azok nullának választhatók, tehát $a' = 0$, $b' = 0$. A deriváltak

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(z) = \Phi(z) &= -\frac{F}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{z} + \Gamma - \frac{a_{-1}}{z^2} - \frac{2a_{-2}}{z^3} - \frac{3a_{-3}}{z^4} - \dots,\\ \psi'(z) = \Psi(z) &= \frac{\kappa\bar{F}}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{z} + \Gamma' - \frac{b_{-1}}{z^2} - \frac{2b_{-2}}{z^3} - \frac{3b_{-3}}{z^4} - \dots .\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

Innen látható, hogy

$$\varphi'(\infty) = \Gamma = B + iC, \qquad \psi(\infty) = \Gamma' = B' + iC' .$$

Az (5.1) összefüggés szerint

$$\sigma_x(\infty) + \sigma_y(\infty) = 2\left[B + iC + B - iC\right] = 4B, \tag{5.5}$$

tehát C elhagyható, mivel az kiesik. Az itt szereplő B, B', C' állandóknak lényeges fizikai jelentésük van. Ugyanis az (5.1) és (5.2) alapján könnyen igazolható, hogy

$$\sigma_x(\infty) = 2B - B', \quad \sigma_y(\infty) = 2B + B', \quad \tau_{xy} = C', \tag{5.6}$$

vagyis ezek az állandók a végtelenbeli feszültségekkel kapcsolatosak.

6 POLÁRKOORDINÁTÁK HASZNÁLATA

Az alkalmazásokban (pl. körszelvényű vágatok esetén) gyakran célszerű henger-koordinátákat, ill. polárkoordinátákat használni. A DESCARTES–koordinátákkal felírt σ_x, σ_y, τ_{xy} feszültségekből, ismert módon könnyen felírhatók a polárkoordinátás alakú σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$ feszültségek. Ezekből, nem túl sok számítással, átalakítással a következő eredményeket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \mathrm{Re}\left[2\Phi - (\bar{z}\Phi' + \Psi)\mathrm{e}^{2i\vartheta}\right], \\ \sigma_\vartheta &= \mathrm{Re}\left[2\Phi + (\bar{z}\Phi' + \Psi)\mathrm{e}^{2i\vartheta}\right], \\ \tau_{r\vartheta} &= \mathrm{Im}\left[(\bar{z}\Phi' + \Psi)\mathrm{e}^{2i\vartheta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Ha u_r a sugárirányú, u_ϑ az érintőirányú elmozdulás, akkor

$$u_r + i u_\vartheta = (u + iv)\mathrm{e}^{-i\vartheta} = \frac{1}{2G}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right]\mathrm{e}^{-i\vartheta}. \tag{6.4}$$

7 VÉGTELEN TARTOMÁNY KÖR ALAKÚ KIMETSZÉSSEL (VÁGATTAL)

A számításoknál igyekszünk kihasználni a körszelvény adta lehetőségeket. Legyen S a *7.1. ábrán* vázolt tartomány, vagyis az R sugarú g kör külseje. A tartomány tetszőleges P pontjának Descartes–koordinátái x, y, polárkoordinátái r, ϑ. A P pontot azonosítva a z komplex számmal,

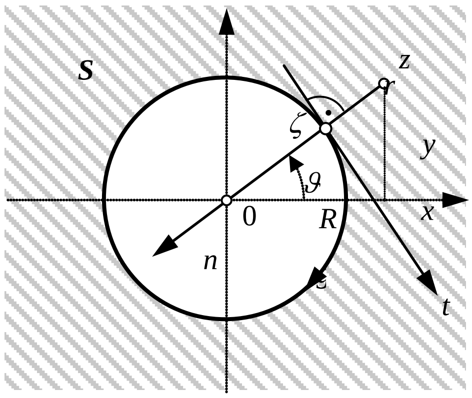
$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = r\mathrm{e}^{i\vartheta}.$$

A ζ pont (komplex szám) a kör kerületén van, így

$$\zeta = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = R\mathrm{e}^{i\vartheta}.$$

A feladat megoldásához szükséges peremértékek:

1. A végtelenbeli feszültségek;
2. A tartomány peremén, vagyis a körön, a külső terhelésből származó σ_r és $\tau_{r\vartheta}$, ún. külső feszültségek. Komplex alakban jelölje ezt $N - iT$. Az ennek megfelelő peremfeltétel tehát így írható:



7.1. ábra

$$\sigma_r(\zeta) - i\tau_{r\vartheta}(\zeta) = N - iT. \tag{7.1}$$

A továbbiakban az (5.4) függvényeket használjuk. A számítások kényelmesebbé tétele érdekében átindexeljük azokat a következőképen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} = \Gamma + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots, \\ \Psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k} = \Gamma' + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \dots \end{aligned}\right\}. \tag{7.2}$$

A (7.1) peremfeltétel alakja

$$\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - e^{2i\vartheta}\left[\bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)\right] = N - i\mathrm{T}. \tag{7.4}$$

A (7.2) függvények a_k, b_k együtthatóinak meghatározása érdekében fejtsük hatványsorba (pontosabban LAURENT-sorba) a (7.4) jobb oldalán lévő $N - i\mathrm{T}$ függvényt. Legyen ez a sor

$$N - i\mathrm{T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\vartheta} \tag{7.5}$$

A (7.4) bal oldalán álló $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ stb. függvények LAURENT-sorát már felírtuk a (7.2)-ben. Vegyük azokat a sorokat is a peremen, azaz írjunk z helyére ζ -t. Ezeket és a (7.5) sort is behelyettesítve a (7.4) egyenlőségbe, majd az együtthatók összehasonlítási módszerét alkalmazva, meghatározhatjuk az a_k és b_k együtthatókat (L. MUSKHELISVILI 199-201. oldal). A Φ és Ψ függvények a (7.4) peremfeltételből CAUCHY-típusú integrálok segítségével is meghatározhatók.

Ehhez szorozzuk meg (7.4) mindkét oldalát

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\zeta - z}\text{-vel,}$$

ahol z az S tartomány tetszőleges pontja, majd integráljunk mindkét oldalon tagonként a g kör mentén. Tehát a következő újabb feladatot kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{\overline{\Phi(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{e^{2i\vartheta}\cdot\overline{\zeta}\Phi'(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{e^{2i\vartheta}\cdot\Psi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{N - iT}{\zeta - z}d\zeta \qquad 7.15)$$

Ezután képezzük a (7.4) peremfeltétel minden tagjának konjugáltját, majd az így kapott konjugált peremfeltétel mindkét oldalát integráljuk az előzőhöz hasonló módon:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{\overline{\Phi(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{e^{-2i\vartheta}\cdot\zeta\overline{\Phi'(\zeta)}}{\zeta - z}\zeta d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{e^{-2i\vartheta}\cdot\overline{\Psi(\zeta)}}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_g \frac{N + iT}{\zeta - z}d\zeta\,. \qquad (7.16)$$

A (7.15)-ben és (7.16)-ban szereplő CAUCHY-típusú integrálokat kiszámítva, a Φ és Ψ függvények meghatározhatók.

8 TOVÁBBLÉPÉS

Ismert, hogy a

$$z = x + i\,y\,, \qquad \overline{z} = x - i\,y$$

transzformációval a

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

biharmonikus egyenlet a

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = 0 \qquad (10.1)$$

egyenletre egyszerűsödik. Ez a GOURSAT által 1898-ban publikált alak lényeges egyszerűsítést jelent, amely a rugalmasságtan síkfeladatának megoldását is egyszerűsítheti. Ennek ellenére a közelmúltig ez mintha feledésbe merült volna. Muskhelisvili ugyan 1953-ban kiadott könyvében megemlíti, de nem használja ki ő sem az ebben rejlő lehetőségeket. SZÖLLŐSI IMRE munkáiban található erre nézve igen szép és ötletes eljárás. A

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \qquad \tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\,\tau_{xy} \qquad (10.2)$$

egyenlőségekkel bevezetve a σ és τ komplex feszültségeket, a továbbiakban ezzel a két ismeretlennel dolgozik. Ezeket felhasználva, az (1.1) egyensúlyi egyenletek helyébe a

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial\tau}{\partial z} = 0 \qquad (10.3)$$

egyenlet lép. Az (1.4) kompatibilitási egyenlet új alakja pedig

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial z\,\partial\overline{z}} = 0. \qquad (10.4)$$

A (10.1) biharmonikus egyenlethez tehát a (10.3) egyensúlyi és a (10.4) kompatibilitási egyenlet kapcsolódik. Hasonlóan egyszerűsödnek a geometriai-és az anyagegyenletek is. Mindezek egyszerűsítik a feladat megoldását. A σ és τ komplex feszültségek ismeretében a valós feszültségek:

$$\sigma_x = \sigma + \frac{\tau + \overline{\tau}}{2}, \qquad \sigma_y = \sigma - \frac{\tau + \overline{\tau}}{2}, \qquad \tau_{xy} = -i\frac{\tau - \overline{\tau}}{2}\,. \qquad (10.5)$$

A részletek szép, érdekes feldolgozásban SZÖLLŐSI IMRE könyvében találhatók.

9 IRODALOM

Asszonyi, Cs.; Béda, Gy.; Fülöp, T.; Szarka, Z. (2009): Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról. Mérnökgeológia – Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9. Műegyetemi Kiadó.

Asszonyi, Cs.; Gálos, M.; Kertész, P.; Richter, R. (1980): A kőzet-mechanika anyagszerkezeti és reológiai alapjai. Veszprémi Akadémiai Bizottság Kiadványa

Babuska, I.; Rektorys, K.; Vycichlo, F. (1960): Mathematische Elastizitätsthearie der ebennen Probleme. Akademie – Verlag, Berlin.

Béda, Gy.; Kozák, I. (1980): A rugalmasságtan síkbeli feladatai. Fizikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Béda, Gy.; Kozák, I. (1987): Rugalmas testek mechanikája. Műszaki Kiadó, Budapest. 91-94.

Bezuhov, N.I. (1952): Bevezetés a rugalmasságtanba és a képlékenységtanba. Tankönyvkiadó, Budapest.

Fazekas, F. (1963): Műszaki matematikai gyakorlatok. Komplex függvénytan. Tankönyvkiadó, Budapest.

Fenyő, I.; Frei, T. (1964): Matematika villamosmérnököknek I. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Gáspár, Gy.; Szarka, Z. (1969): Műszaki matematika VI. kötet. Komplex függvénytan. Tankönyvkiadó, Budapest.

Kaliszky, S.; Kurutzné Kovács, M.; Szilágyi, Gy. (2000): Szilárdságtan. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Kantorovics, L.V.; Krülov, V.I. (1953): A felsőbb matematika közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Muskhelisvili, N.I (1953): Some basic problems of matematical theory of elasticity. P. Noordhoff Ltd, Groningen – Holland.

Obádovics, J. Gy.; Szarka, Z. (2009): Felsőbb matematika, SCOLAR Kiadó, Budapest.

Szarka, Z. (1991): Alkalmazott matematika (Parciális differenciálegyenletek). Tankönyvk., Bp. Egyetemi J.

Szöllösi, I. (2004): A rugalmasságról. A MERSENNE–számokról. Timp Kiadó, Budapest