

Általánosított hővezetési egyenletek vizsgálata

Analysis of generalized heat conduction equation

Kovács Róbert

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék,
e-mail: kovirobi88@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÁS

A hővezetés Fourier-egyenletének érvényességi körét vizsgáltam az egyenlet termodinamikai alapú gyengén nem lokális általánosításainak segítségével. A termodinamikai megközelítés a lehetséges általánosítások közül kiválasztja azokat, amelyek a második főtétellel leginkább összhangban veszik figyelembe a memória és a nem lokális hatásokat. Ezek közül a Guyer-Krumhansl és a Green-Naghdi-egyenletre explicit véges differencia sémát dolgoztam ki és megállapítottam annak stabilitási feltételeit. A kidolgozott numerikus eljárást kísérleti körülményeknek megfelelő kezdetiérték problémában a megfelelő anyagi paraméterek mérésére használtam, és kísérleti adatok segítségével megállapítottam az egyenletek paramétereit.

Kulcsszavak: hővezetés, numerikus szimuláció, stabilitás

ABSTRACT

I analyzed validity range of Fourier heat conduction equation with using a weakly non local generalization thermodynamical. A thermodynamic approach selects memory and gradient effects according to the second law. I worked out an explicit finite difference scheme to model the behaviour of Guyer-Krumhansl and Green-Naghdi equations with considering the appropriate stability criteria of the numerical scheme. I applied the elaborated numerical method to analyse certain initial value problems which belongs to experiment conditions to measure material parameters, I determined the parameters of the equations by using the data of the book experiment.

Keywords: heat conduction, numerical simulation, stability

1 BEVEZETÉS

Hőmérsékleti hatásokat az építőmérnöki gyakorlatban számos, váratlan esetben is megfigyelhetünk. Egyik ilyen példát az 1. ábra mutat, ahol a Bábaapáti atomhulladék-lerakó egyik extenzométeres vizsgálatának eredményét láthatjuk. A kúszásra szuperponálódó deformáció ingadozások periódusa kb. 1 év, minden bizonnyal hőmérsékleti eredetű. Az ehhez hasonló hatások leírására első közelítésben a Fourier-egyenletet használhatjuk, de heterogén anyagokban a csatolt hőátadási hatások eredőjeként a Fourier-egyenlethez nem lokális és memória jelenségeket leíró gradiens és időderivált tagok csatolódnak.

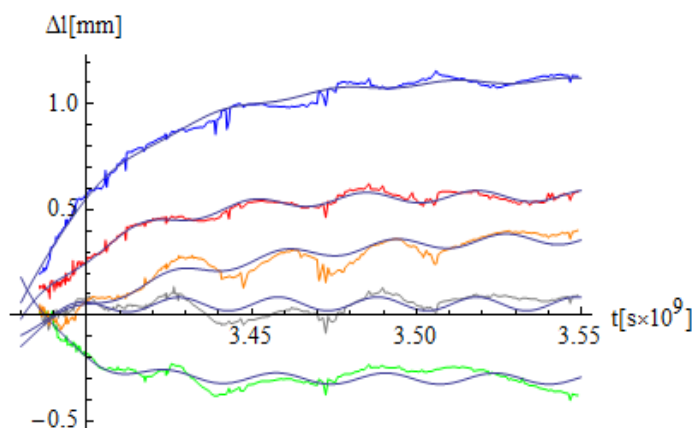
2 MEMÓRIA ÉS NEMLOKÁLIS HATÁSOK

Memória hatás alatt értjük, hogy nem azonnal következik be a közeg és a zavarás kölcsönhatása. Ilyen hatásokat leíró modellek nem csak az aktuális időpontokat veszik alapul a közeg dinamikájának leírásához, hanem az előtte lévőket is, fontos a közeg előélete.

Sokat emlegetett példa a Fourier-féle hővezetési egyenlet. Ott az egyenlet parabolikus voltából következik a végtelen jelterjedési sebesség¹. Ezzel szemben a hiperbolikus típusú Maxwell – Cattaneo

¹ Megjegyzendő, hogy ettől még a mérnöki problémák jelentős hányadában alkalmazható elmélet.

– Vernotte-egyenlet már tartalmaz egy újabb anyagi paramétert, mely a közeg tehetetlenségét hivatott modellezni, ezáltal megszüntetve a fent leírt terjedési sebesség problémáját. Fontos szem előtt tartani, hogy a hiperbolikus egyenletekre jellemző jelterjedési sebesség anyagfüggő, továbbá a parabolikus egyenletek is megfogalmazhatóak relativisztikus módon, melyek már figyelembe veszik a fénysebesség által szabott korlátot.



1. ábra: Az extenzométer mért értékei Kovács et al (2012) (*Measured data of the extensometer.*)

Sokat emlegetett példa a Fourier-féle hővezetési egyenlet. Ott az egyenlet parabolikus voltából következik a végtelen jelterjedési sebesség². Ezzel szemben a hiperbolikus típusú Maxwell – Cattaneo – Vernotte-egyenlet már tartalmaz egy újabb anyagi paramétert, mely a közeg tehetetlenségét hivatott modellezni, ezáltal megszüntetve a fent leírt terjedési sebesség problémáját. Fontos szem előtt tartani, hogy a hiperbolikus egyenletekre jellemző jelterjedési sebesség anyagfüggő, továbbá a parabolikus egyenletek is megfogalmazhatóak relativisztikus módon, melyek már figyelembe veszik a fénysebesség által szabott korlátot.

A nem lokális hatás is hasonló módon értelmezhető, a közeg dinamikája nem csupán a vizsgált térrész legközelebbi szomszédos pontjai által kerül meghatározásra, nem hanyagolható el a távolabbi pontok hatása sem.

Legalább 3 módszer létezik az evolúciós egyenletek ilyen irányú kiterjesztéséhez. Az első a hiperkontinuum elmélet, mely új változókat vezet be a már meglévő tér-idő változók mellé. A második az erősen nemlokális elmélet, mely térintegrálokat és memória funkciókat használ fel. Ennek az elméletnek a gyakorlati jelentősége csekély, nehezen használható. A harmadik – számunkra a legérdekesebb – a gyengén nem lokális kontinuumok elmélete.

A gyengén nem lokális elmélet magasabb rendű térderiváltakat használ, mint a klasszikus. A hővezetés elméletének ilyen szempontú megközelítése a Fourier-féle hővezetés többféle kiegészítésére vezet. Ezeknek a termodinamikai levezetését Ván és Fülöp (2012) és Ván (2001) alapján a következő fejezetben foglalom össze.

3 A HŐVEZETÉSI ELMÉLET ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A levezetés során merev, izotróp anyagot veszek figyelembe. A belső energia megmaradását a következő mérlegegyenlet fejezi ki.

$$\rho \dot{e} + \partial^i q^i = 0, \quad (1)$$

ahol a fajlagos belső energia, ρ a sűrűség, ∂^i jelöli a térderiváltat, q^i pedig a belső energia áramsűrűségének a konduktív része, továbbá a pont az idő szerinti parciális deriváltat jelöli. Az indexekre az Einstein-féle összegzési szabály érvényes. A következő lépésként bevezetünk egy ξ^i -vel jelölt vektoriális belső változót. Ennek felhasználásával az entrópiát leíró függvényt a következő formában feltételezzük.

$$s(e, \xi^i) = \hat{s}(e) - \frac{m}{2} \xi^2, \quad (2)$$

² Megjegyzendő, hogy ettől még a mérnöki problémák jelentős hányadában alkalmazható elmélet.

ahol m anyagra jellemző konstans, a termodinamikai induktivitás. Az entrópiaprodukción leíró egyenlőtlenség pedig úgy írható:

$$\rho \dot{s} + \partial^i J^i = \sigma \geq 0. \quad (3)$$

Az egyenletben szereplő s jelöli a fajlagos entrópiát, J^i pedig az entrópia konduktív áramsűrűsége, ami itt megegyezik a konvektívval.

A folytatáshoz megköveteljük, hogy energiaáram nélkül entrópiaáram se alakulhasson ki, így a klasszikus

$$J^i = \frac{q^i}{T} \quad (4)$$

formától eltérően az entrópiaáramot

$$J^i = B^{ij} q^j \quad (5)$$

formában feltételezzük, ahol B^{ij} konstitutív függvény.

A fenti összefüggéseket az entrópiaprodukción leíró egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial s}{\partial e} \Big|_{\xi^i} \dot{e} + \frac{\partial s}{\partial \xi^i} \Big|_e \dot{\xi}^i \right) + \partial^i (B^{ij} q^j) &= -\frac{1}{T} \partial^i q^i - \rho m \xi^i \dot{\xi}^i + (\partial^i B^{ij}) q^j + B^{ij} (\partial^i q^j) = \\ &= \partial^i q^j \left(B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} \right) - m \rho \xi^i \dot{\xi}^i + (\partial^i B^{ij}) q^j \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

melyhez felhasználtam az entrópia potenciálosságának tulajdonságát és a belső energia mérlegegyenletét, valamint a deriválásnál alkalmazandó láncszabályt. A δ^{ij} jelöli a Kronecker szimbólumot. A fenti összefüggésben a termodinamikai erők és áramok jól elkülöníthetőek egymástól (1. táblázat).

1. táblázat: Termodinamikai erők és áramok (*Thermodynamic forces and fluxes*)

	Klasszikus hőtani	Kiterjesztett hőtani	Belső változóból eredő
Áramok	q^i	$B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij}$	$m \rho \xi^i$
Erők	$\partial^j B^{ij}$	$\partial^i q^j$	$-\xi^i$

Az izotróp anyagokban a legáltalánosabb lineáris összefüggések a termodinamikai erők és áramok között hét izotróp anyagi paraméterrel jellemezhetőek.

$$q^i = l_1 \partial^j B^{ij} - l_{12} \xi^i, \quad (7)$$

$$\rho m \dot{\xi}^i = l_{21} \partial^j B^{ij} - l_2 \xi^i, \quad (8)$$

$$B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} = k_1 \partial^i q^j + k_2 \partial^j q^i + k_3 \partial^k q^k \delta^{ij}, \quad (9)$$

ahol $l_1, l_2, l_{12}, l_{21}, k_1, k_2, k_3$ a skalár vezetési együtthatók. Az entrópiaprodukción pozitívítási követelménye az alábbi feltételeket szabja:

$$l_1, l_2, k_1, k_2, k_3 \geq 0, \text{ és} \quad (10)$$

$$L = l_1 l_2 - \frac{1}{4} (l_{12} + l_{21})^2 \geq 0. \quad (11)$$

A következőkben elimináljuk a B^{ij} és a ξ^i tagokat az egyenletekből, ehhez kifejezve B^{ij} -t (9)-ből, majd behelyettesítve (7) és (8) egyenletekbe, adódik:

$$q^i = l_1 \left(k_1 \partial^{ij} q^j + k_2 \partial^{jj} q^i + k_3 \partial^{ki} q^k + \partial^i \frac{1}{T} \right) - l_{12} \xi^i, \quad (12)$$

$$\rho m \dot{\xi}^i + l_2 \xi^i = l_{21} \left(k_1 \partial^{ij} q^j + k_2 \partial^{jj} q^i + k_3 \partial^{ki} q^k + \partial^i \frac{1}{T} \right), \quad (13)$$

ahol a deriválásokat rendre minden vonatkozó tagon kijelöltem és felhasználtam a Kronecker szimbólum indexcserélő tulajdonságát. A zárójeles kifejezések megegyeznek, ezeket a kényelmesebb jelölés kedvéért elnevezem „A”-nak. Innen további rendezések segítségével kapjuk:

$$\frac{\rho m}{l_2} \dot{q}^i - \rho m \frac{l_1}{l_2} \dot{A} + q^i = \left(l_1 - \frac{l_{12} l_{21}}{l_2} \right) A. \quad (14)$$

Elvégezhetünk bizonyos összevonásokat, melyeket az alábbiakban külön-külön definiálok:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\rho m}{l_2}, \quad \lambda_1 = l_1 - \frac{l_{12}l_{21}}{l_2}, \quad \lambda_2 = \rho m \frac{l_1}{l_2}, \quad a_1 = \lambda_1(k_1 + k_3), \quad a_2 = \lambda_1 k_2, \\ b_1 &= \lambda_2(k_1 + k_3), \quad b_2 = \lambda_2 k_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Így a végleges formájában írva az egyenletet:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right) + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i + b_1 \frac{\partial}{\partial t} (\partial^{ij} q^j) + b_2 \frac{\partial}{\partial t} (\partial^{jj} q^i). \quad (16)$$

Ezzel megkaptuk az általános hővezetési egyenletet izotróp kontinuumokra vonatkozóan, melyben τ jelöli a relaxációs időt, λ_1 a hővezetési tényezőt, $\lambda_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ további anyagi paraméterek, melyeknek szerepe még nem teljesen feltérképezett. Ebből származtathatóvá válnak a különféle hővezetési egyenletek, mint speciális esetei az általános hővezetési egyenletnek. A következőkben az 5 legfontosabb eset kerül tárgyalásra.

Fourier-típusú hővezetés

Amennyiben $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, valamint $l_{12} = 0$, úgy azonnal adódik:

$$q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T}. \quad (17)$$

Maxwell–Cattaneo–Vernotte-típusú³ hővezetés

Első lépésként szükséges feltételeznünk Casimir-típusú antiszimmetrikus keresztteffektusok meglétét, mellyel $l_{12} = -l_{21}$ és amennyiben $l_1 = 0$ ($\rightarrow \lambda_2 = 0, b_2 = 0$), úgy mondhatjuk, hogy a belső változó arányos a hőárammal. Továbbá az általános forma sugallja számunkra, hogy $b_1 = a_1 = a_2 = 0$. Ezekkel a feltevésekkel adódik:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T}. \quad (18)$$

Guyer–Krumhansl-típusú⁴ hővezetés

Szintén szükséges a Casimir keresztteffektus megléte, továbbá $\lambda_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$, ekkor:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i. \quad (19)$$

Jeffreys-típusú /késleltetéses/ hővezetés

Származtatása az előző kettővel ellentétben nem igényli a Casimir effektus meglétét. Ha $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, akkor kapunk egy MCV-egyenlethez hasonló alakot, melynek érdekessége, hogy a nemlineáris hatás nem küszöbölhető ki hőmérsékletfüggő együtthatók alkalmazásával. Formája:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right). \quad (20)$$

Green–Naghdi-típusú⁵ hővezetés

Ennek a típusnak létezik általános változata is, itt csupán a dolgozatban is felhasznált, egyszerűbb változatot mutatom be. Származtatása szintén igényli a Casimir keresztteffektus feltételezését ($l_{12} = -l_{21}$), valamint $l_2 = l_1 = 0$. Így adódik az alábbi forma:

$$\tau \dot{q}^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i. \quad (21)$$

Érdekességként érdemes megjegyezni, hogy ez a típusú egyenlet eredményezhet hővezetést nulla entrópiaprodukciónál, amennyiben az entrópia áramsűrűsége (J^i) a klasszikus formát alkalmazzuk. Emiatt a GN-típusú egyenlet érvényessége kétséges, a GK-típus ennél elfogadottabb.

A Fourier-féle egyenletet összehasonlításához fogom használni, hogy jól láthatóvá tegyem az eltéréseket a különböző típusok között. Az MCV-típusú egyenlet már régóta létezik és az alkalmazhatósági tulajdonságai alaposabban feltérképezettek, így vizsgálatomnak különösen nem tárgya, de jól szemlélteti a hőterjedés hullám természetét. Részletesen a GK- és GN-egyenletekkel foglalkozom.

³ A továbbiakban „MCV”-nek rövidítve utalok erre a típusra.

⁴ A továbbiakban „GK”-nak rövidítve utalok erre a típusra.

⁵ A továbbiakban „GN”-nek rövidítve utalok erre a típusra. Valamint megjegyzem, hogy a GN-típusnak többféle változata is létezik, ehhez lásd Ván (2013), Relokalizálható kontinuumok – hővezetés fejezetet.

A fent említett egyenleteket dimenziótlan formában vizsgálom, mivel a fizikai hatás megfigyelése nem függhet a dimenziótól. További megkötés a fenti egyenletekre, hogy csak 1 térdimenzióban kerülnek megoldásra, ez csökkenti a vizsgálandó anyagi paraméterek számát és jelentősen egyszerűsíti a megoldást. A különböző típusokra jellemző karakterisztika bemutatásához egy dimenzió is elegendő és jobban átlátható. Továbbá külön fejezetet kívánok szánni az alkalmazott numerikus séma leírására, melyben részletesen vizsgálom annak stabilitási követelményeit is mindkét egyenlettípus esetén.

4 A DIMENZIÓTLAN GUYER-KRUMHANSL- ÉS GREEN – NAGHDI-EGYENLET

Az általános hővezetési egyenlet 1 térdimenzióban az alábbi formát ölti:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = -\hat{\lambda}_1 \partial^i T - \hat{\lambda}_2 \partial^i \dot{T} + a \partial^{jj} q^i + b \partial^{jj} \dot{q}^i, \quad (22)$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{T^2}, \hat{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{T^2}, a = \lambda_1 k_2, b = \lambda_2 k_2, \quad (23)$$

ahol a kalappal jelölt hővezetési együtthatók tartalmazzák a deriválásból származó négyzetes hőmérsékleti tagot, a pont jelöli a szubsztanciális időderiváltat, valamint az a és b anyagi paraméterek nem igényelnek külön indexelést, mivel 1 dimenzióban csak egy-egy marad meg az egyenletben.

A fajlagos belső energia mérlegegyenlete:

$$\rho c \dot{T} + \partial^i q^i = 0, \quad (24)$$

melyben felhasználtam, hogy $e = cT$, ahol c jelöli a fajhőt. A (22)-(24) felhasználásával kapható általános formában a kizárólag hőmérsékleti tagokat tartalmazó egydimenziós hővezetési egyenlet.

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = \hat{\lambda} T'' + a \dot{T}'' + b \ddot{T}'' . \quad (25)$$

Itt egyszerűbb módon – vesszővel került jelölésre a térderivált, mivel más dimenzióval nem összekeverhető. Ilyen formában a GK-típusú egyenlet megegyezik a Jeffreys-típusú kiterjesztéssel:

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = \hat{\lambda} T'' + a \dot{T}'' . \quad (26)$$

A dimenziótlantást a következőkben definiált paraméterekkel⁶ végezzük el.

$$\theta = \frac{T-T_0}{T_{end}-T_0}; Fo = \frac{\alpha t}{L^2}; \xi = \frac{x}{L}; \Pi^2 = \frac{\alpha \tau}{L^2}; T_{end} = T_0 + \frac{1}{\rho \cdot c \cdot L} \cdot \int_0^{t_p} q_0(t) dt; \quad (27)$$

ahol θ a dimenziótlan hőmérséklet, Fo a dimenziótlan idő, ξ jelöli ezentúl a dimenziótlan térparamétert, Π^2 a dimenziótlan relaxációs idő, α a hődiffuzivitási paraméter, továbbá T_{end} definiál egy, a kísérlethez tartozó hőmérsékletet, mely a rendszer gerjesztésének utolsó időpontbeli hőmérséklet értékét fejezi ki – esetünkben a legnagyobb hőmérsékleti értéket fogjuk hozzárendelni. A dimenziótlantás szoros kapcsolatban áll a perem és kezdeti feltételekkel, mivel azokat is át kell alakítani és annak megfelelően definiálni. A fenti dimenziótlan paraméterek felhasználásával – visszahelyettesítésével adódik az alább látható dimenziótlanGK-egyenlet.

$$\Pi^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Fo^2} + \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \hat{a} \frac{\partial^3 \theta}{\partial Fo \partial \xi^2}, \quad (28)$$

ahol \hat{a} a dimenziótlan anyagi paraméter, dimenziótlantása az $\hat{a} = \frac{a}{L^2}$ formában adódik. A GN-egyenletet szintén teljesen hasonlóképpen kapjuk, mint a GK-egyenletet, formája az alábbi:

$$\tau \ddot{T} = \hat{\lambda} T'' + a \dot{T}'' . \quad (29)$$

A dimenziótlantáshoz használt paraméterek is megegyeznek, így a dimenziótlanGN-egyenlet az alábbi formában írható:

$$\Pi^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \hat{a} \frac{\partial^3 \theta}{\partial Fo \partial \xi^2} . \quad (30)$$

A későbbi vizsgálatok tárgyát a fentebb származtatott dimenziótlan egyenletek fogják képezni. Mielőtt viszont bemutatnám magát a mérést és a szimulációt, melyben a viselkedésüket vizsgáltam, kitérek a felhasznált numerikus módszerre és annak analízisére.

⁶ A dimenziótlan paramétereket a Czél et al. (2013a) szerint definiáltam.

5 NUMERIKUS MEGOLDÁSI SÉMA

A numerikus sémák konstruálása során a véges differencia módszert használtam fel, figyelve arra, hogy a séma explicit legyen. Bár vannak hátrányai – főképp a stabilitás szempontjából, mint azt látni fogjuk – de egyszerű és gyors megoldást kínál, ha ismertek a feltételek a stabilitáshoz. Az alábbiakban az egyenletek tagjait az átláthatóság végett külön-külön tárgyalom. A GK- és GN-egyenletek közötti eltérésre ahol szükséges, ott felhívom majd a figyelmet és külön jelölni is fogom az eltérést.

Az egyenletek tagonkénti bontásban a konstansok elhagyásával alább olvashatóak. Az indexelésben az első index („n”) jelenti az időlépést, a második („j”) jelenti a helylépést.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Fo^2} \approx \frac{\theta_{n-1,j} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n+1,j}}{\Delta Fo^2}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} \approx \frac{\theta_{n+1,j} - \theta_{n-1,j}}{2\Delta Fo}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \approx \frac{\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}}{\Delta \xi^2}. \quad (33)$$

Végül a harmadrendű, vegyes tag képzésénél speciálisan közelítettem az idő és helyderiváltakat.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Fo} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) &\approx \frac{1}{\Delta Fo} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \Big|_n - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \Big|_{n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta Fo} \cdot \left(\frac{\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}}{\Delta \xi^2} - \frac{\theta_{n-1,j-1} - 2\theta_{n-1,j} + \theta_{n-1,j+1}}{\Delta \xi^2} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Az előzőekben kifejtett tagokból összerakható a GK-egyenlet, melyet az új időpontbeli hőmérsékletet kifejező tagra ($\theta_{n+1,j}$) rendezve adódik, most már a konstansokkal együtt:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1,j} &= \frac{1}{\frac{\pi^2}{\Delta Fo^2} + \frac{1}{2\Delta Fo}} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\Delta Fo^2} \cdot (2\theta_{n,j} - \theta_{n-1,j}) + \frac{\theta_{n-1,j}}{2\Delta Fo} + \frac{1}{\Delta \xi^2} \cdot (\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}) \right) + \\ &+ \frac{1}{\frac{\pi^2}{\Delta Fo^2} + \frac{1}{2\Delta Fo}} \cdot \hat{a} \cdot \left(\frac{\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}}{\Delta \xi^2} - \frac{\theta_{n-1,j-1} - 2\theta_{n-1,j} + \theta_{n-1,j+1}}{\Delta \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

A GN-egyenletet is teljesen hasonló módon kaphatjuk meg, a fenti egyenletben pirossal szedett betűkkel jelöltem az eltérő tagokat a két séma között, azaz a pirossal jelölt tagok hiányoznak a GN-egyenlet sémájából. Mint már említettem, a fő kérdés a séma stabilitása. Ennek vizsgálatára a Neumann-féle stabilitási analízist alkalmaztam, mellyel a differencia egyenlet karakterisztikus polinomját fogom kiszámítani.

Ezután bizonyos követelményeket – Jury stabilitási kritériumok Marton (2006) – fogok állítani a polinommal szemben, melynek segítségével eldönthető, hogy az adott differencia egyenlet stabilan viselkedik-e és ezzel párhuzamosan magát a stabilitási kritériumot is megszabja, azaz milyen értékek mellett teljesülnek az egyenlőtlenségek.

A következőkben a GK-egyenlet sémájára írom fel az analízis lépéseit, a GN-egyenletre kapott eredményeket a fejezet végén közlöm – levezetés nélkül, mivel a lépések ugyanazok.

Neumann-féle analízis

Tételezzük fel a differencia egyenlet megoldását⁷ az alábbi formában:

$$\theta_{n,j} = \psi^n \cdot e^{ikj\Delta \xi}. \quad (36)$$

Ahol az alsó indexben „n” az időlépés, „j” jelöli a helylépést, ahogy az az egyenlőség jobb oldalán lévő kitevőkre is érvényes. Ebben az alfejezetben „i” a képzetes egység jelölése, ξ pedig a szokásos, dimenziótlan helykoordináta, valamint „k” a hullámszám. A ψ jelöli a növekedési rátát.

Következő lépésben visszahelyettesítünk és az előzőekben már bemutatott tagok a kiemelések és egyszerűsítések után az alábbiak szerint alakulnak:

⁷ Az egymástól lineárisan független sajátfüggvények, mint a differencia egyenlet megoldásai, rendre ilyen formában állnak elő.

$$\Pi^2 \frac{\theta_{n-1,j} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n+1,j}}{\Delta F_0^2} = \frac{\Pi^2}{\Delta F_0^2} \cdot e^{ikj\Delta\xi} \cdot (\psi^{n-1} - 2\psi^n + \psi^{n+1}), \quad (37)$$

$$\frac{\theta_{n+1,j} - \theta_{n-1,j}}{2\Delta F_0} = \frac{e^{ikj\Delta\xi}}{2\Delta F_0} \cdot (\psi^{n+1} - \psi^{n-1}), \quad (38)$$

$$\frac{\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}}{\Delta\xi^2} = \frac{\psi^n}{\Delta\xi^2} \cdot (e^{ik(j-1)\Delta\xi} - 2e^{ikj\Delta\xi} + e^{ik(j+1)\Delta\xi}), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{a}}{\Delta F_0} \cdot \left(\frac{\theta_{n,j-1} - 2\theta_{n,j} + \theta_{n,j+1}}{\Delta\xi^2} - \frac{\theta_{n-1,j-1} - 2\theta_{n-1,j} + \theta_{n-1,j+1}}{\Delta\xi^2} \right) = \\ = \frac{\hat{a}}{\Delta F_0 \Delta\xi^2} \cdot (\psi^n - \psi^{n-1}) \cdot (e^{ik(j-1)\Delta\xi} - 2e^{ikj\Delta\xi} + e^{ik(j+1)\Delta\xi}). \end{aligned} \quad (40)$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás eredményeképp az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\alpha\psi^2 - \beta\psi - \gamma = 0, \quad (41)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\Delta F_0} + \frac{\Pi^2}{\Delta F_0^2}, \quad \beta = \frac{2\Pi^2}{\Delta F_0^2} + (2 \cos(k\Delta\xi) - 2) \cdot \left(\frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{\hat{a}}{\Delta F_0 \Delta\xi^2} \right), \\ \gamma &= \frac{1}{2\Delta F_0} - \frac{\Pi^2}{\Delta F_0^2} - (2 \cos(k\Delta\xi) - 2) \cdot \frac{\hat{a}}{\Delta F_0 \Delta\xi^2}. \end{aligned}$$

A numerikus séma stabil, amennyiben $|\psi| \leq 1$, $\forall k \geq 0$. Első ránézésre a koszinusz tag gondot jelenthet, azonban a későbbi észrevételeim tapasztalata azt mutatja, hogy határeset akkor áll elő, amennyiben a $\cos(k\Delta\xi) = -1$, így a hullámszámmal nem kell foglalkozni. Azonban ahelyett, hogy meghatároznánk a másodfokú egyenlet gyökeit, inkább a Jury stabilitási kritériumokat alkalmazom.

Jury kritériumok

Adott a rendszer karakterisztikus polinomja az alábbi formában:

$$D(\psi) = a_2\psi^2 + a_1\psi + a_0, \quad (42)$$

ahol

$$a_2 = \alpha, \quad a_1 = -\beta, \quad a_0 = -\gamma.$$

A polinom gyökei az egységkörön belül vannak a komplex számsíkon, azaz a lineáris differencia egyenlet egyensúlya aszimptotikusan stabil, ha:

- 1) $D(\psi = 1) \geq 0$
- 2) $D(\psi = -1) \cdot (-1)^2 \geq 0$
- 3) $|a_0| < a_2$

A feltételeket sorra véve a következők eredmények adódnak a megfelelő egyszerűsítéseket és helyettesítéseket elvégezve.

$$1) \quad D(\psi = 1) = \alpha - \beta - \gamma \geq 0 \Rightarrow \frac{2-2 \cos(k\Delta\xi)}{\Delta\xi^2} \geq 0$$

Határesetben egyenlőség áll fenn, amúgy $D(\psi = 1) > 0 \quad \forall k \geq 0$.

$$2) \quad D(\psi = -1) = \alpha + \beta - \gamma \geq 0 \Rightarrow \frac{\Pi^2 \Delta\xi^2}{2\Delta F_0} - \frac{\Delta F_0}{2} \geq \hat{a}$$

Ez a reláció a stabilitási feltétele⁸ a GK egyenlet numerikus sémájának, mely a határeset képzésével áll elő.

$$3) \quad |a_0| < a_2 \Rightarrow \frac{\Pi^2 \Delta\xi^2}{2\Delta F_0} \geq \hat{a}$$

Hasonló feltételt jelent, mint a 2. pontban látott reláció. Ha az előző pontban deklarált feltétel teljesül, ez is teljesül.

⁸ Érdekességképp jegyzem meg, hogy a differencia egyenlet jobb oldalán lévő hőmérsékleti tagokat csoportosítva és az előtagjaik előjelét vizsgálva szintén kaphatunk hasonló feltételeket, melyek jól becslik a stabilitás határát, azonban a levezetésük nem általános, fenntartásokkal kezelendő.

Minden Jury feltétel teljesül, továbbá a módszer alkalmazásával találtunk egy stabilitási összefüggést a paraméterekre vonatkozóan.

A GN-egyenletre alkalmazva a Neumann-féle helyettesítést – ugyanazon lépések által – az alábbi másodfokú egyenlet adódik, némi módosítással a konstansokban.

$$\alpha\psi^2 - \beta\psi + \gamma = 0, \quad (43)$$

ahol

$$\alpha = \frac{\Pi^2}{\Delta Fo^2}, \beta = \frac{2\Pi^2}{\Delta Fo^2} + (2 \cos(k\Delta\xi) - 2) \cdot \left(\frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{\hat{a}}{\Delta Fo \Delta\xi^2} \right),$$

$$\gamma = \frac{\Pi^2}{\Delta Fo^2} + (2 \cos(k\Delta\xi) - 2) \cdot \frac{\hat{a}}{\Delta Fo \Delta\xi^2}.$$

A stabilitási kritériumok ugyanazok maradnak, a vizsgálat során szintén a $\cos(k\Delta\xi) = -1$ határesetet feltételezem. Megjegyzem, a másik határesetben, ahol $\cos(k\Delta\xi) = 1$, egyenlőség áll fenn, azaz a helyettesítési érték ($\psi = 1$) gyöke a másodfokú egyenletnek, mely a Neumann-féle vizsgálatban megengedett.

$$1) D(\psi = 1) = \alpha - \beta + \gamma \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{\Delta\xi^2} > 0$$

$$2) D(\psi = -1) = \alpha + \beta + \gamma \geq 0 \Rightarrow \frac{\Pi^2 \Delta\xi^2}{2\Delta Fo} - \frac{\Delta Fo}{2} \geq \hat{a}$$

Azaz ugyanazt a feltételt szabja a stabilitáshoz, mint ahogy a GK-egyenlet esetében is tapasztaltuk.

$$3) |a_0| < a_2 \Rightarrow \frac{4\hat{a}}{\Delta Fo \Delta\xi^2} > 0 \quad \forall \hat{a} > 0$$

Ez a feltétel a GN-egyenlet esetében kizárja az $\hat{a} = 0$ esetet. GK-típusú egyenlet esetén viszont megengedett (\rightarrow MCV-típusú hővezetés).

A stabilitási analízis ebben az esetben is adott kritériumot a paraméterek közötti kapcsolatra. Mítovább, ebben az esetben kaptunk egy újabb megszorítást \hat{a} -ra, mely különbözik a GK-típusú hővezetési egyenlettől. Fontos megjegyezni, hogy ennek a fejezetnek az eredménye alapvető elvárás a vizsgálat folytatásához.

6 A KÖNYV KÍSÉRLET

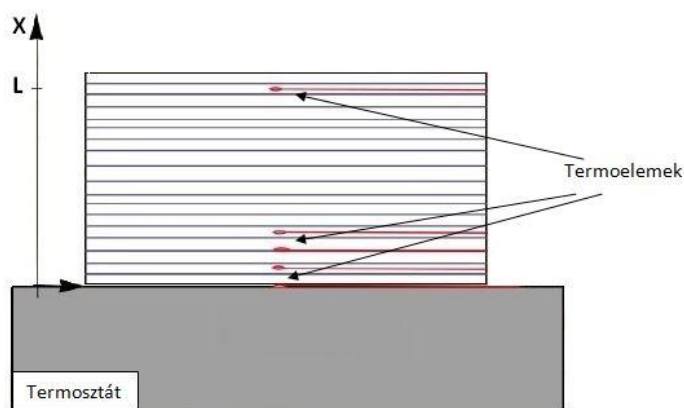
A kísérletet 2013-ban az Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken végezték a [4] irodalom szerzői. Az alábbiakban ismertett leírás is ez alapján a dokumentum alapján készült el, valamint a mérés során rögzítésre került eredményeket felhasználtam a dolgozatomhoz.

A kísérlet során egy réteges szerkezetű minta került felhasználásra, egészen pontosan egy 200 rétegből álló, összesen 20 [mm] vastagságú, 19 [cm] x 15 [cm] –es méretű lapokból álló könyv. A mérés elrendezését az alábbi (2. ábra) mutatja. Fontos megjegyezni, hogy a problémát 1 dimenziósnak tételezzük fel.

A lapok a rövidebb oldalukon hozzá vannak erősítve a termosztáthoz. A hőmérséklet méréséhez K-típusú, réz-konstantán termoelem került felhasználásra. Két, nagyon hasonló mérés készült el. Az első mérés során a legelső termoelem a termosztát réz felületébe volt beépítve, a többi termoelem 1 [mm], 2 [mm], 3 [mm] és 19 [mm] távolságra a termosztát felszínétől került elhelyezésre, ahol a könyvben lévő termoelemek különböztek a termosztátban lévőktől.

A második mérés keretén belül már 8 darab termoelem került felhasználásra, ahol az első termoelem a második lap után lett elhelyezve, nem pedig közvetlenül a termosztát felszínén, továbbá mind a 8 termoelem azonos volt.

Számunkra a második mérés és annak eredményei a fontosak, a továbbiakban a fejezet keretein belül csak ezzel fogok foglalkozni.



2. ábra⁹. A mérési elrendezés. (Measurement arrangement.)

A mérés menete

A mérés kezdetén a könyv hőeloszlása egyenletes. A már előmelegített termosztátra lett rátéve, mely így hirtelen hőmérsékletugrásként jelentkezik a mért adatokban (3. ábra). Pár perc elteltével, a mérés második részében a könyv levételre került a termosztátról, de a hőmérséklet mérése tovább tart, megfigyelve ezzel a hűlési görbéket.

A 2. lap után elhelyezett érzékelő van legközelebb a termosztáthoz, így ennek a termoelemnek a mért adatai láthatóak a 3. ábra legfelső, piros színű görbéjén. Az ábrán lefelé haladva az egyre távolabb elhelyezkedő termoelemek által mért hőmérséklet adatokat figyelhetjük meg.

A görbeillesztés

A Czél et. al (2013b) cikk szerzői az illesztést ehhez a méréshez a Fourier-típusú egyenlettel végezték el, melyben a hővezetési együttható konstans, azaz nem függ a hőmérséklettől¹⁰.

Az illesztés során a legfelső és a legalsó termoelemek által mért hőmérsékletgörbék értékei kerültek felhasználásra, mint elsőfajú peremfeltétel. A kezdeti érték a könyv egyenletes hőmérséklet eloszlásával adott, mely a Fourier-típusú egyenlethez elég, azonban számunkra a GK- és GN-típus használatakor szükségünk van egy második kezdeti feltételre is. A Fourier-egyenlet használatakor azt találták, hogy a $\lambda = 0.0681 \pm 0.0001 \left[\frac{W}{mK} \right]$ értékű hővezetési együttható illeszti legjobban a mért adatokhoz az elméleti értékeket (3. ábra).

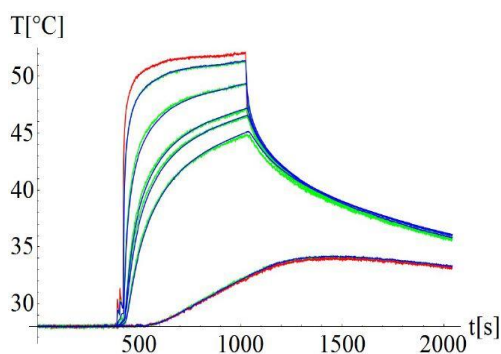
Ahhoz, hogy az illesztést a dimenziótlan egyenletekkel is el lehessen végezni, előbb a mért adatokat át kell konvertálni dimenziótlan adatokká a már korábban definiált paraméterekkel. A GK- és GN-típusú dimenziótlan egyenletek illesztése során előnyt jelent, hogy csupán két paraméterrel, a dimenziótlan relaxációs idővel (Π^2) és a dimenziótlan anyagi paraméterrel (\hat{a}) kell foglalkozni, ezzel jelentősen csökkentve a releváns együtthatók számát. Az illesztés során konstans hővezetési együtthatóval dolgozom.

A dimenziótlan időlépték segítségével számolom a hődiffuzivitás és a maximális hosszúság négyzetének hányadosát, melyet felhasználok a relaxációs idő kiszámításánál is. Továbbá némi szűrést kellett alkalmazni a mért adatokra. A 3. ábrán is jól látható, a gerjesztés pillanatában hirtelen ugrások jelennek meg, ezeket kiszűrtem az adatok közül, mivel az illesztés minőségét rontják. Továbbá figyelmet kell még szánni a gerjesztés előtti mért hőmérséklet értékekre, az eltérő értékek a hőmérők pontatlan kalibrációját jelzik.

Megjegyzem, további finomításokat is lehetne végezni a mért adatokon, melyek simábbá és jobban közelíthetővé tennék a mért eredményeket, azonban ez nem feltétele annak, hogy használható eredményekhez jussunk.

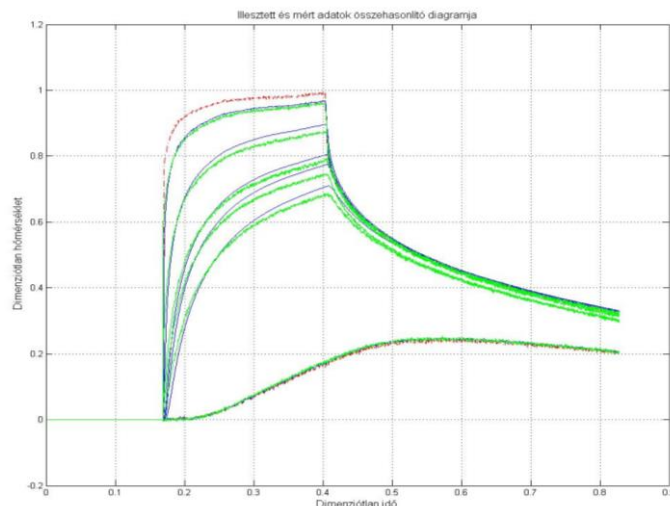
⁹ Az ábra a Czél et al (2013b) alapján (2. oldal, 1. ábra) kisebb módosításokkal került itt közlésre.

¹⁰ Megszeretném jegyezni, hogy az első kísérlet alkalmával hőmérsékletfüggő együtthatóval is dolgoztak, továbbá a GK-típusú hővezetési egyenletet más formában, mint ahogy ebben a dolgozatban szerepel – is alkalmazták. Mindkét elmélet jól közelítette a valóságot, jó illesztést lehetett elérni mindkét típus használatával.



3. ábra. A piros színű görbék jelölik a peremfeltételeket, a zöld színű görbék a mért adatokat, a kék színű görbék pedig az illesztett értékek, Ván et al (2013). *(The red lines indicates the boundary conditions, the green lines indicates the measured datas, the blue lines indicates the fitted values.)*

A peremfeltételek – ahogy a Fourier-egyenlet használata esetén is történt – szintén elsőfajúak, az első és az utolsó termoelem mért értékeit használtam fel ehhez. Továbbá – mint említettem – szükséges egy második kezdeti feltétel definiálása is. Ebben az esetben a hőmérséklet időderiváltját egyenlővé tettem nullával. A jó összehasonlíthatóság végett a dimenziótlán Fourier-egyenletet is felhasználtam a fent említett hővezetési tényezővel. Az illesztett görbéket a 4. és az 5. ábra mutatja.

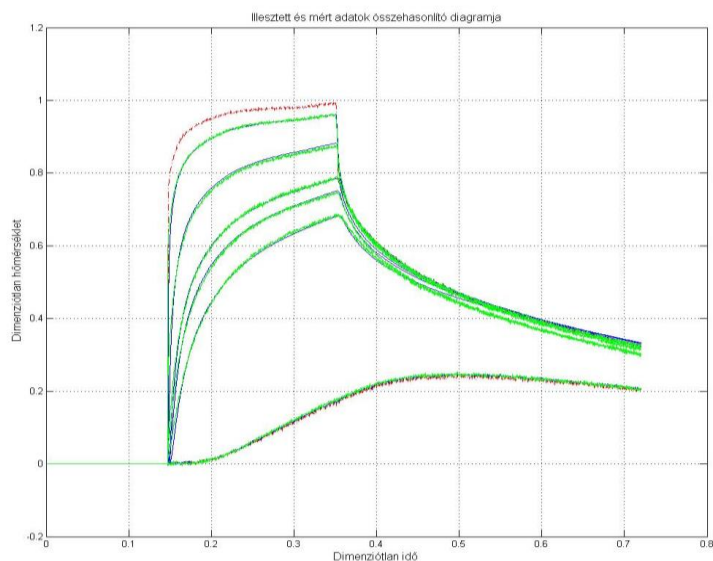


4. ábra. Az illesztett és a mért adatokat összesítő diagram a Fourier-egyenlet esetén. A kék színű görbesereg mutatja az illesztett eredményt, a zöld színű görbesereg mutatja a mért értékeket. *(Fitted data in the case of Fourier equation. The red lines indicates the boundary conditions, the green lines indicates the measured datas, the blue lines indicates the fitted values.)*

Az illesztés kézzel történt, pontosságán numerikusan lehetne javítani. A megtalált legjobban illeszkedő paramétereket az alábbi, 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat. A GK-típusú egyenletet illesztő paraméterek. *(The parameters of the fitted GK equation.)*

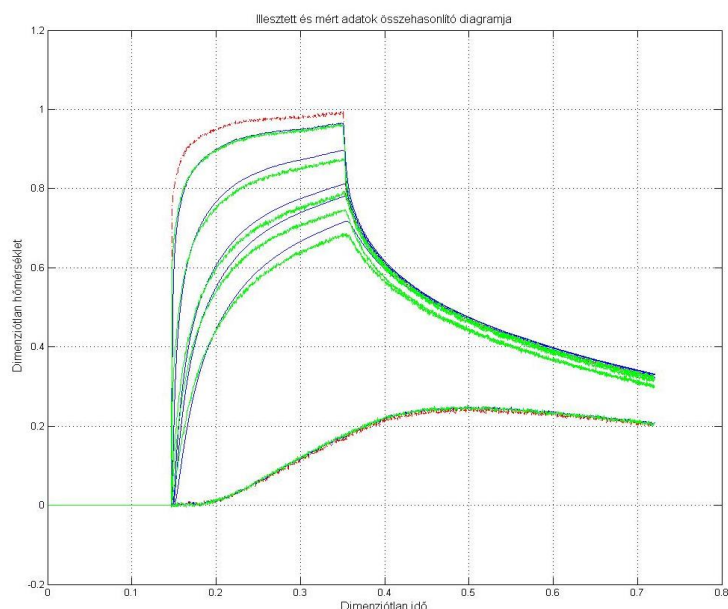
Dimenziótlán			
Dimenziótlán relaxációs idő (Π^2)		Dimenziótlán anyagi paraméter (\hat{a})	
0.05315		0.079	
Dimenziós			
Hődiffuzivitás (α) [$\frac{m^2}{s}$]	Relaxációs idő (τ) [s]	Anyagi paraméter (a) [m^2]	Hővezetési együttható (λ) [$\frac{W}{mK}$]
$5.795 \cdot 10^{-8}$	155	$1.3351 \cdot 10^{-5}$	0.068



5. ábra. Az illesztett és a mért adatokat összesítő diagram a GK-egyenlet esetén. A kék színű görbesereg mutatja az illesztett eredményt, a zöld színű görbesereg mutatja a mért értékeket. (*Fitted data in the case of GK equation. The red lines indicate the boundary conditions, the green lines indicate the measured data, the blue lines indicate the fitted values.*)

Amennyiben a hődiffuzivitás és a relaxációs idő szorzata az „a” anyagi paraméter értékét adná, úgy a Fourier-egyenlet szerinti megoldást kapnánk vissza, ebben az esetben viszont nincs így. A 2. táblázatban közölt értékek mellett láthatóan jobban illeszkedik a GK-egyenlet által modellezett hőmérséklet, mint a Fourier-egyenlet esetén, mely arra utal, hogy Fourier-féle hővezetésen túli viselkedés tapasztalható.

Az 6. ábra látható a GN-egyenletet illesztő paraméterek eredménye. Az illesztési paramétereket nehéz volt megkeresni, mivel teljesen más nagyságrendben van a relaxációs idő, ennek realitása erősen megkérdőjelezhető. A 3. táblázat foglalja össze az egyenlet paramétereit. További finomításra nincs szükség, mivel láthatóan irreálisak az eredmények.



6. ábra. Az illesztett és a mért adatokat összesítő diagram a GN-egyenlet esetén. A kék színű görbesereg mutatja az illesztett eredményt, a zöld színű görbesereg mutatja a mért értékeket. (*Fitted data in the case of GN equation. The red lines indicate the boundary conditions, the green lines indicate the measured data, the blue lines indicate the fitted values.*)

3. táblázat: A GN-típusú egyenletet illesztő paraméterek. (*The parameters of the fitted GNequation.*)

Dimenziótlan			
Dimenziótlan relaxációs idő (Π^2)		Dimenziótlan anyagi paraméter (\hat{a})	
5.721		6.875	
Dimenziós			
Hődiffuzivitás (α) [$\frac{m^2}{s}$]	Relaxációs idő (τ) [s]	Anyagi paraméter (a) [m^2]	Hővezetési együttható (λ) [$\frac{W}{mK}$]
$5.795 \cdot 10^{-8}$	16683	$1.271 \cdot 10^{-3}$	0.068

7 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom Ván Péternek, aki a kutatás során nélkülözhetetlen segítséget nyújtott a számomra és ötleteivel, tanácsaival segítette a munkám, valamint Czél Baláznak, aki a szoftver használatához nyújtott fontos segítséget.

A kutatást az OTKA K81161 pályázat támogatta.

8 IRODALOMJEGYZÉK

- Czél B., Fülöp T., Gróf Gy., Ván P. 2013a. Comparison of Temperature Responses of the Laser Flash Method in Case of Parabolic and Hyperbolic Heat Conduction Models; *HEEP*, Balatonfüred,
- Czél B., Gróf Gy., Gyenis Á., Fülöp T., Ván P. 2013b. Simple Heat Conduction Experiments, *HEEP* Balatonfüred, (megjelenés alatt).
- Kovács L., Mészáros E., Deák F., Somodi G., Máté K., Jakab A. (Kömérő Kft.); Vásárhelyi B. (Vásárhelyi és Társa Kft.); Geiger J. (SZTE); Dankó Gy., Korpai F., Mező Gy., Darvas K. (GolderZrt.); Ván P., Fülöp T., Asszonyi Cs. (Montavid Termodinamikai Kutatócsoport) 2012. A Geotechnikai Értelmező Jelentés (GÉJ) felülvizsgálata és kiterjesztése. *Kézirat* – Kömérő Kft. Pécs, 2012. december. RHK Kft. Irattár, RHK-K-032/12.
- Marton L. F. 2006. Jelek és Rendszerek, *Scientia*, 183-185;
- Ván P. 2001. The Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard Equations; *Physics Letters. Weakly Nonlocal Irreversible Thermodynamics A* V290(1-2): 88-92; arXiv:cond-mat/0106568v5;
- Ván P. 2013. Nemegyensúlyi Termomechanika, *Kézirat*
- Ván P., Czél B., Fülöp T., Gróf Gy., Gyenis Á., Verhás J. 2013. Experimental Aspects of Heat Conduction Beyond Fourier; *12th Joint European Thermodynamics Conference*, Brescia
- Ván P., Fülöp T. 2012. Universality in Heat Conduction Theory. *Weakly Nonlocal Thermodynamics Annalen der Physik* (Berlin) 524/8: 470-478; arXiv:1108.5589v3;