Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2013 (Szerk: Török Á., Görög P. & Vásárhelyi B.)
Oldalak: 317-332

A deformálható, szilárd, folytonos közegek matematikai modellezésének egyes kérdéseiről: topológikus, metrikus és numerikus szempontok

On some problems of the mathematical modelling of deformable solid continuous media: topological, metrical and numerical points of view.

Lámer Géza
DE MK Műszaki Menedzsment és Vállalkozási Tanszék, lamer@lamer-es-lamer-kft.hu glamer@eng.unideb.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: A tanulmányban a numerikus módszert tekintjük a kiterjedt testek modellje megalkotása alapgondolatának. Megmutatjuk, hogy a sok részecske mozgására vonatkozó hipotézisek, amelyek lehetővé teszik, hogy a nagyszámú függvény helyett véges számú függvénymezővel jellemezzük a kiterjedt test állapotváltozását, eleve a folytonosságot, illetve a diszkrétség magába foglaló hipotézisekre épülnek fel. Ennek folyományaképpen a tanulmányban áttekintjük a numerikus módszer szerepét a modellalkotásban, majd ezt követően a topológia, a metrika és a numerikus módszerek szerepét a deformálható, szilárd, folytonos közegek matematikai modellezésében.

ABSTRACT: In this study we regard the numerical methods as a possible form for the creation models of the expanded bodies. We show the hypothesis referred to the movement of the many particle and what make possible to characterise the change of the state of the body with finite number functions instead of numerous functions automatically based on the hypothesis included the continuous or discrete behaviour of the particles (of the body). Consequence of this we give a survey on the role of the numerical methods in the creation of the models of material bodies, and after that we survey the role of the topology, the metric, and the numerical method in the mathematical model of the deformable solid continuous bodies.

Kulcsszavak: topológia, metrika, numerikus módszer, deformálható szilárd testek, folytonos közegek, diszkrét periodikus rendszerek, általánosított kontinuumok.

Keywords: topology, metrics, numerical methods, deformable solid bodies, continuous media, discreet periodical systems, generalized continuums.

1 BEVEZETÉS

A közeget alkotó atomok és molekulák számát – legalábbis a nagyságrendjét – a 10^{23} értékkel szokás megadni. Ez a szám igen nagy – több szempontból is.

- 10^{23} részecske állapota egyesével nem követhető végig, ennyi (kapcsolt) egyenletet nem vagyunk képesek egyidejűleg megoldani.
- 10^{23} részecske kezdeti helye, helyzete, deformálódottsága (alakváltozási állapota), sebessége, szögsebessége, gyorsulása, szöggyorsulás, deformálódási sebessége és gyorsulása, nem határozható meg, nem mérhető meg egyidejűleg.
- 10^{23} részecske egymással való kapcsolata, netán az azok között fellépő kölcsönhatások (kapcsolati erők) nem határozhatók meg, nem mérhetők meg egyidejűleg.

Gyakorlati szempontból, mire egy többszázezer elemből álló rendszer – pl. szemcsehalmaz – minden elemének a geometriai és mechanikai jellemzőjét meghatározzuk, kimérjük, addigra a rendszert „megsemmisítjük”, és valamilyen más állapotú rendszerré rendezzük át.

Az anyagot alkotó nagyszámú „részecske” számosságának (10^{23}) az okán az anyag (mechanikai) állapotának minden egyes részecskére kiterjedő leírása nem valósítható meg. Rendszerint „fizikai”, illetve „mechanikai” megfontolások során a kiterjedt testet anyagi pontnak, merev testnek, deformálható szilárd testnek, folyadéknak, gáznak, vagy rácskontinuumnak, illetve statisztikus sokaságnak tekintjük. A modellalkotás során részben a folytonosságra, részben a mérésre vonatkozó hipotéziseket alkalmazunk vagy impliciten, vagy expliciten. Jelen tanulmányban rámutatunk arra, hogy a modellalkotást tekinthetjük úgy is, mintha numerikus módszert alkalmaznánk, az egyes modellekhez sajátos bázisfüggvényeket (és hibaelveket) választunk, továbbá a folytonosságra és a metrikus tulajdonságokra vonatkozó hipotézisek a bázisfüggvény megválasztásában eleve szerepet játszanak, és e miatt nem csak lehetőséget adnak egy-egy, egymástól független modell kidolgozására, hanem egyúttal be is határolják az egyes modellek alkalmazási körét is.

Általában önmagától érthetőnek tekintjük, hogy ha egy modellt alkalmazunk, akkor annak belső logikáját követve ellentmondásmentes elmélethez jutunk. Ma már azt is önmagától érthetőnek tekintjük (különösen a relativitáselmélet és a kvantumelmélet térhódítását követően), hogy egy-egy új elmélet határait a modellalkotás módja mintegy *magától* kijelöli. Mindezek ellenére úgy tűnik, hogy a kontinuummechanikában fel sem merült az a kérdés, hogy a modell alkalmazhatóságát a folytonosság, a metrika értelmezése, illetve a numerikus módszerek alkalmazása korlátozhatná. Jelen tanulmányban áttekintjük a folytonosság, a metrika és a numerikus módszerek alkalmazásának a feltételeit, ezzel együtt azokat a korlátokat, amelyeket a modell alkalmazása során szükségszerűen figyelembe kell venni.

2 A KITERJEDT TESTEKRE VONATKOZÓ MECHANIKAI MODELLALKOTÁS, MINT NUMERIKUS MÓDSZER

A kiterjed testek mechanikai modellezésének „alapvető” feladata olyan modellt alkotni, amelyekben az ismeretlenek száma „korlátozott”: annyi legyen az ismeretlenek száma, hogy az azok meghatározására vonatkozó matematikai feladatot (valamilyen egyenletrendszert) a rendelkezésre álló matematikai apparátussal (és a „rendelkezésre álló” időben) „kellő” pontossággal meg lehessen oldani.

A sok-sok részecske egyedi mozgására vonatkozó „elmélet” helyettesítését véges számú állapotjellemző függvénnyel leírható „elmélettel” általánosságban mechanikai modellezésnek szokás tekinteni (és nevezni). Mi a nagyszámú ismeretlen mennyiség eliminálását, és helyettesítését véges számú ismeretlennel egy numerikus módszer alkalmazásának fogjuk tekinteni.

A numerikus módszer főbb lépéseiből kiemeljük a modellalkotás szempontjából szükséges lépéseket: a bázisfüggvények megválasztása, valamint a hibavektor és a hibaelv kiválasztása, majd a hibaelv alkalmazása az ismeretlen mennyiségekre (bázisfüggvényekre) vonatkozó egyenletek (az „elmélet”) felállítása céljából (lásd SCHARLE 1974, 1976).

Természetesen a numerikus módszer további lépéseket is tartalmaz, mint például kezdeti értékek és peremértékek értelmezése és meghatározása, a felállított egyenletrendszer megoldása, a nyert megoldások vizsgálata, a nyert megoldások értelmezése, a numerikus eljárás korlátjainak a meghatározása. Ez utóbbi kérdések kívül esnek a jelen tanulmány keretein.

A sok-sok részecske eliminálásának egyik lehetséges útja, hogy úgy tekintünk a kiterjedt testre, mintha a sok-sok részecske azonos módon mozogna térben: gyakorlatilag minden részecske mozgásának – eltolódásának – a leírására ugyanazt a bázisfüggvényt alkalmazzuk; ezt tekinthetjük a nulladik közelítésnek. Ebben a megközelítésben nem lesz ismertünk sem az egyes részekék egymáshoz viszonyított mozgásáról, sem a test helyzetéről („forgásáról”), sem a testet alkotó részecskék között fellépő kölcsönhatásról. Ez a megközelítés vezet az anyagi pont fogalmához.

A modell bővítésének az első lépése, hogy a részecskék egymással „párhuzamos” mozgása (eltolódása) mellett figyelembe vesszük, hogy minden részecske a test egy pontja (tengelye) körül azonos szöggel fordul el; ekkor a részecskék mozgásának a leírására két komponenst adunk meg: minden részecske azonos módon tolódik el, és azonos szöggel fordul el ugyanazon tengely körül. Ezt tekinthetjük első közelítésnek, amelyben továbbra sem lesz ismeretünk az egyes részekék egymáshoz viszonyított mozgásáról, valamint a közöttük fellépő kölcsönhatásról. Ez a megközelítés vezet a merev test fogalmához.

A modell bővítésének a további lépései arra kell, hogy irányuljanak, hogy a modell arról adhasson információt, amelynek a vizsgálatát az első két modell kizár: az egyes részecskék egymáshoz viszonyított mozgásáról és az egymás közötti kölcsönhatásról. Ahhoz, hogy ezt figyelembe lehessen venni – és ne kelljen az eredeti problémával, tehát a 10^{23} számú részecske egyedi mozgásával – szembenézni, a részecskék mozgására vonatkozóan valamilyen feltételt (hipotézist) kell elfogadni, de olyan feltételt, amely lehetővé teszi, hogy az ismeretlenek számát lényegesen lehessen csökkenteni. Ez a feltétel, értelemszerűen, a részecskék egymáshoz viszonyított mozgására kell, hogy vonatkozzék. Két esetet kell megkülönböztetni. Az egyik, amikor a testet alkotó részecskék egymáshoz viszonyított rendje megmarad, a másik, hogy nem marad meg.

Amikor a rend megmarad, akkor további két „egyszerűsítő” lehetőséget vehetünk figyelembe. Az egyik, hogy a részecskék kollektívan, a másik, hogy diszkréten mozognak.

A kollektív mozgás a következőképpen jellemezhető: ha egy részecske elmozdul, pl. „jobbra”, akkor vele mozdulnak a környezetében lévő részecskék is, jelen esetben azok is „jobbra” mozdulnak el. Ez a feltevés önmagában még nem elégséges, hogy modellt alkothassunk. Ennél szigorúbb feltételt, szigorúbb hipotézist kell alkotnunk – pontosabban alkalmaznunk – ahhoz, hogy csak néhány számú ismeretlen mennyiségre, pontosabban mennyiség-mezőre korlátozhassuk a test mozgásának a leírását. Ez a feltétel, ez a hipotézis a folytonosság feltétele, a folytonosság hipotézise. Azaz nem elegendő, hogy sok részecske kollektíven egy irányba mozdul el, hanem az is szükséges, hogy az elmozdulás legyen folytonos. (A folytonosság topológiai vizsgálatát lásd később.)

A diszkrét mozgást az alábbi módon írhatjuk le: ha egy részecske elmozdul, pl. „jobbra”, akkor az a részecske, „amelyre” elmozdul, az a „jobbra” mozduló részecskére mozdul el, azaz „balra”; továbbá, az a részecske „amelytől” mozdult el, az is „balra” mozdul el. Így például minden első részecske „jobbra”, minden második részecske „balra” mozdul el. A mozgás során a részecskék egymással nem érintkeznek, helyet nem cserélnek. Ez a mozgás illusztrálja, hogy mit tekintünk rácspontokban „mozgó” („ülő”) részecskék rendszere diszkrét mozgásának. Ha minden egységnyi eltolódáshoz a szomszédos részecskének mindig tetszőleges egységnyi eltolódását választunk, akkor belátható, hogy ugyanott vagyunk, ahol az eredeti modell: 10^{23} nagyságrendben értelmezünk diszkrét mozgást leíró ismeretleneket. A korlátozott számú mozgásra vonatkozó modellt úgy alkothatunk, ha a „jellemző” állapotokat tartjuk meg. Hogy mit tekinthetünk „jellemzőnek”, az általánosságban nem értelmezhető. De ha az adott mechanikai rendszer (kristályrács, belső szerkezetű anyag, keretszerkezet) sajátos viselkedését vesszük figyelembe, akkor az egymással párba állítható „egységek” száma korlátozható. A korlátozás jó közelítéssel – a rácsdinamikából kölcsönzött kifejezéssel élve – az első néhány optikai rezgésformára vonatkozik. (A kollektív mozgások lesznek, ugyancsak ezen terminológia szerint, az akusztikus rezgésformák.) Azon kívül, hogy a lehetséges egymásra, illetve egymástól való elmozdulás eseteit különböztetjük meg, még egy közelítést alkalmazunk: a diszkrét pontokban értelmezett függvényeket a rácskontinuumot magába foglaló, „beágyazó” térben értelmezett folytonos függvényekkel közelítjük. Más, a numerikus eljárásokban megszokott kifejezéssel élve a nagyon sok (10^{23} nagyságrendű), diszkrét értelmezési tartományú függvényt sorba fejtjük a diszkrét pontokat magába foglaló térben értelmezett folytonos függvények terében. A sorfejtésben néhány tagot tartunk meg, amelyeknek rendszerint mind a diszkrét, mind a folytonos mozgást részlegesen visszatükrözik. Ebben a modellben a modellalkotás lényege a sorfejtés, az alkalmazott hipotézisek magukba foglalják egyrészt azt, hogy a részecskék a rácspontok környezetében „tartózkodnak” (a „rácspontokban ülnek”, a „rácspontok körül mozognak”), másrészt azt, hogy a mozgásállapotot a sorfejtésben alkalmazott függvények „kellő” pontossággal írják le.

Amikor a testet alkotó részecskék egymáshoz viszonyított rendje nem marad meg, azaz a részecskék egymással ütköznek és helyet cserélnek, akkor a részecskék mozgására nézve legfeljebb azzal a hipotézissel élhetünk, hogy térben és/vagy időben meghatározható a részecskék állapotának eloszlása, azaz hogy meghatározható, hogy a mozgást (az állapotot) jellemző egy-egy változónak valamely intervallumához hány részecske köthető. A modellben a változó mennyiség egy-egy részecske „típusának” (anyagi pont, merev test, deformálható szilárd test) megfelelő mozgásállapotára vonatkozik (sebesség, szögsebesség, rezgésalakok). Az eloszlás nem adja meg, hogy ténylegesen hány részecske van az egyes mechanikai állapotban. Ha úgy testszik átlagot ad, ha úgy teszik várható értéket ad. A modellalkotás során azt használjuk ki, hogy nagyszámú részecske alkotja rendszert, és azzal a hipotézissel élünk, hogy a részecskék makroszkopikus (tehát amit mi szemmel látunk és amit mi a műszereinkkel kimérünk) állapotát létrehozó egyes mikroállapotok száma igen nagyszámú, és hogy az egyik mikroállapotból egy másikba való átmenet során a makroszkopikus állapot nem változik.

Összefoglalva a deformálható testekre vonatkozó modellalkotási lehetőségeket a nem deformálódóra vonatkozó modellekkel, a kiterjedt testek mechanikai mozgására vonatkozó modelljeinket az alábbi rendszerbe foglalhatjuk össze (lásd pl. LÁMER 1985b, 1986, 1994).

- Korlátozottan véges számú (néhány száz, néhány ezer, ma már esetleg tízezer) anyagi pontból, merev testből, ritkábban deformálható testből álló rendszer.
- Korlátozottan, illetve korlátozás nélküli véges számú, periodikusan elrendezett anyagi pontból, merev testből, ritkábban deformálható testből álló rendszer (rácskontinuum, általánosított kontinuum).
- Korlátozás nélküli véges számú (tehát 10^{23}), egymással véletlenszerű kapcsolatban álló, rendszerint anyagi pontként, vagy merev testként, ritkábban deformálható szilárd testként modellezett részecskék rendszere, amelyben az állapotok eloszlását statisztikus eszközökkel határozzuk meg.
- Folytonos, deformálható kiterjedt test (klasszikus kontinuum).

A négy nagyobb modellcsaládból az első modell az egymással nem érintkező rendszerekre, és a szemcsehalmazokra értelmezhető. Az első nem tekinthető kiterjedt közegnek, a második – mint például a talaj – igen. Ennek kapcsán lásd LÁMER 2008.

A második modellcsalád, a diszkrét periodikus rendszer esetén, az alapgondolat a folytonos, beágyazó térben folytonos értelmezésű tartományú függvények terében sorba fejtjük a diszkrét értelmezésű tartományú függvényeket. Ez a modellcsalád adja az általánosított kontinuumok elméletét: az egyes anyagi részecskék helyett az euklideszi tér egy ponthalmazát tekintjük, és a test állapotát „globálisan” eltolódásvektor-mező, elfordulásvektor-mező, direktor-mező, feszültségi, nyomatéki és magasabb rendű feszültségi tenzormezők határozza meg. Ezeket a függvényeket „felvesszük”, erre nézve egyenletrendszert állítunk fel. A nyert megoldást viszont nem a mezőkre, hanem csak a rácspontokban ülő anyagi pontokra, merev testekre, illetve deformálható szilárd testekre vonatkoztatjuk. Azaz itt a hangsúly a numerikus módszeren van. Ennek kapcsán lásd LÁMER 2007.

A statisztikus eloszlással operáló elméletek arra alapoznak, hogy a testet alkotó részecskéknek a térben elfoglalt helyének, és néhány fizikai hatásnak (pl. hőmérséklet, gravitáció) ismeretében megadható az egyes részecskék állapotára vonatkoztatható globális és lokális mennyiség. A hangsúly a statisztikus módszereken van. Ez a modell kívül esik jelen tanulmány keretein.

A negyedik modell egybeesik a klasszikus kontinuummal: a vizsgált test egyes anyagi részecskéi helyett a vizsgált test által egy, az euklideszi térben „lefedett” ponthalmazt tekintjük, és a test állapotát az ezen a ponthalmazon értelmezett eltolódásvektor-mező, alakváltozási tenzormező, feszültségi tenzormező határozza meg. Ezeket a függvényeket „felvesszük”. A modellalkotásról lásd LÁMER 2007. Ebben a modellben a topológia és metrika szerepéről és korlátairól a következő két paragrafusban részletesen értekezünk.

Megjegyezzük, hogy a modellek fenti osztályozása nem teljes: nem tartalmazza a folyadékok és a gázok elméletét. A topológiai kérdések tárgyalás során rá fogunk mutatni arra, hogy a folyadékok és gázok lamináris áramlása (sőt, bizonyos esetekben az örvényes áramlása is) a folytonosság hipotézisének egy sajátos értelmezése mellett a jelen osztályozás keretén belül modellezhető. (Értelemszerűen a folyadékot és a gázt nem tekintjük sem deformálható szilárd testnek, sem pedig kontinuumnak.) Megjegyezzük azt is, hogy a turbulens áramlás leírásához a turbulenciát rendszerint „kisimítják”, azaz abban az esetben is „numerikus” megközelítést” alkalmaznak. A folyadékok és gázok áramlása kívül esik a tanulmány keretein.

Végül megjegyezzük, hogy kiterjed testek mechanikai modelljeinek a megalkotása során nem csak numerikus, topológikus és metrikus szempontokat kell szem előtt tartani. Korábban rámutattunk arra is, hogy a modellalkotásban szerepe van a Newtoni erőtörvénynek, és szerepe lehet a termodinamikának is (LÁMER 2013.).

3 A TOPOLÓGIA SZEREPE ÉS KORLÁTAI A KONTINUUMMECHANIKÁBAN

3.1 *A kiterjed test és a folytonosság hipotézise*

A kiterjedt testeket folytonosnak szokás tekinteni. A folytonosságot fizikailag a következőképpen értelmezzük: az anyagot alkotó részecskék egymással érintkeznek; azok között nincs olyan „hiány”, „szakadás”, amely az anyagon belül az atomról-atomra való egymásra következést megszakítaná. Megmutatható, hogy a folytonosnak tekintett szilárd, folyékony, szemcsés és a gáznemű anyag esetén a folytonosság fenti fizikai definíció matematikailag árnyalható (LÁMER 1985b., 2003b., 2006, 2007, 2008, 2010, 2012). A folytonosságot a matematikában mind egy ponthalmazra, mind egy ponthalmaz leképezésére értelmezik. A ponthalmaz esetén folytonosság helyett inkább az „összefüggő” kifejezést alkalmazzák, mindemellett szakkifejezésként több, egyedi feltételt kielégítő ponthalmazt folytonosnak, pontosabban kontinuumnak neveznek (CSÁSZÁR 1970., KELLY 1957.). A leképezés esetén az „egymáshoz való tartozás” (amely értelmezhető környezettel, vagy távolsággal, CSÁSZÁR 1970., KELLY 1957.) „megmaradása” esetén beszélnek folytonosságról.

Az anyag az atomi-molekuláris struktúra miatt – matematikai szempontból – nem tekinthető folytonosnak. A tökéletesen rugalmas anyagi viselkedéstől eltekintve fizikailag sem áll fenn a folytonosság követelménye: a vizsgált test alakjának a megváltozása során az anyagot alkotó atomok és/vagy molekulák átrendeződnek.

A sok-sok részecskéből álló diszkrét rendszert valamilyen értelemben folytonos közeggel kell helyettesíteni. A folytonos közeg értelmezése miatt a modellben mind topológikus, mind pedig metrikus fogalmak és összefüggések szerepet játszanak. Az állítás triviális; néhány, a kezdet kezdetén gömbök illetve, atomok rendszeréből a kontinuum állapotának a leírására levezetni kívánt modelleken kívül minden, a folytonos közegek mechanikai leírásával foglakozó mű hallgatólagosan, vagy nyíltan kimondva a leírandó anyagot az euklideszi térben elhelyezkedő differenciálható sokaságként értelmezi. (Az irodalmi áttekintés helyett mi csak két művet, DUGAS 1988. és TRUESDELL 1966., említünk).

3.2 *A topológia, mint eszköz a folytonos közegek modellezésében*

A ponthalmazok topológiáját, valamint a topológiai, illetve differenciálható sokaságok elméletét ismertnek tételezzük föl (lásd pl. CSÁSZÁR 1970., KELLY 1957., illetve KOBAYASHI–NOMIZU 1963-69, POSZTNYIKOV 1989 és 1988., RASCHEWSZKIJ 1967., STERNBERG 1965., SULANKE–WINTGEN 1972., SZŐKEFALVI-NAGY et al. 1979., STEENROOD 1965.).

A topológiát röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a pontok közötti „összetartozást” környezetekkel értelmezi, és egyúttal az „összetartozást” a ponthalmaz összes pontjára egyszer s mindenkorra rögzíti is. Az összetartozás alatt azt értjük, hogy két, vagy több pont ugyanahhoz a környezethez tartozik. Mivel minden pontra meghatározzuk azt, hogy mely pontok tartoznak a környezetébe, ezért a környezetek rendszere, azaz a topológiai rend, visszatükrözi a pontok egymáshoz viszonyított rendjét (egymásutániságát).

A topológiai rend (és a topológikus leképezés) egyúttal lehetővé teszi, hogy két topológikus teret a topológikus tér belső szerkezetének megtartása mellett egymásra képezzük le.

Megjegyzés: a topológia fogalomkörét a metrikus terekben értelmezett pontsorozatok különböző torlódási és szétválaszthatósági tulajdonságainak leírása során fejlesztették ki. A topológikus tér a metrikus tér olyan „általánosítása”, amelyben a topológiai tulajdonságokat nem a metrikával, hanem annál általánosabb, pl. környezeti rendszerekkel fejezik ki. Arra is rá kell mutatni, hogy a „gazdag” topológiai teret nem kell(ett) „konstruálni”, mivel a valós számokból álló ponthalmaz (amelyet metrikával ellátva nyerjük az Euklideszi teret) eleve rendelkezik azokkal a topológiai tulajdonságokkal, amely a differenciálás és az integrálás elvégzéséhez szükségesek (pl. torlódási pontok létezése, a környezetek szétválaszthatósága, másképpen kifejezve Hausdorff-tér (CSÁSZÁR 1970., 1983, KELLY 1957., KOMORNIK 2003., KOLMOGOROV-FOMIN 1981., RIESZ–SZŐKEFALVI-NAGY 1988.).

A továbbiakban topológikus tér alatt a lokálisan Hausdorff-teret értünk.

3.3 *A topológia alkalmazásának a feltételei*

A topológikus térben fennálló topológiai rend következményeit az alábbiakban foglalhatjuk össze. (A topológia tényekre nézve lásd pl. CSÁSZÁR 1970., 1983, KELLY 1957., KOMORNIK 2003., RIESZ–SZŐKEFALVI-NAGY 1988.)

- A topológiai rend lehetővé teszi a koordinátarendszer értelmezését és alkalmazását: az egyenes vonal beleképezhető a topológikus térbe, a pontok egymásutánisága változatlan, egy pont koordinátái egyértelműen rögzítettek még akkor is, ha a topológiai teret (vagy annak egy tartományát) leképezzük egy másik topológikus térre (vagy annak egy tartományára).
- A topológiai rend lehetővé teszi a határátmenet, ezzel együtt a differenciálás és az integrálás értelmezését és alkalmazását: a teljesség teszi lehetővé, hogy a pontsorozatoknak legyen torlódási pontja, a szétválaszthatóság teszi lehetővé, hogy a sorozat határértéke egyértelmű legyen.

A ponthalmazra vonatkoztatott topológia rend a mechanika szempontjából „befagyasztja” a belső mozgást, a belső szabadságfokokat: egy pontnak nincs mérete, a pontnak csak az eltolódása értelmezhető, az elfordulása nem. (Megjegyezzük, hogy nem a lehetséges szabadságfokok száma korlátozott, például a merev test kinematikai szabadságfoka a háromdimenziós Euklideszi térben hat, hanem a teljes szabadságfokokat „magába foglaló”, a vizsgálat elvégzésére „kiszemelt” tér fizikailag nem a háromdimenziós Euklideszi térben foglal helyet, hanem attól függetlenül, matematikailag konstruáljuk meg; a merev test példájánál maradva a fázistér dimenziója hat.)

A ponthalmazra vonatkoztatott topológiai rend lehetővé teszi a klasszikus kontinuum értelmezését: a test szilárd, az atomi-molekuláris rend változatlan, a leképezés topológikus (folytonos). A klasszikus kontinuumban maga a beágyazó tér, vagy annak egy tartománya reprezentálja a vizsgált anyagot, a kontinuumot „alkotó” pontoknak csak eltolódási szabadságfoka van.

A ponthalmazra vonatkoztatott topológiai rend lehetővé teszi az áramlás kontinuuális leírását. A test áramlását (szemcsehalmaz = por, folyadék, gáz, ez utóbbihoz kell még a termodinamikai formalizmus is) a beágyazó térben adja meg; a beágyazó térben, mint topológikus térben zajlik az áramlás: a vizsgált pont a beágyazó tér egy rögzített pontja, nem változik a helye, ezen a ponton az idő különböző pillanatában más és más anyagi részecske halad keresztül.

3.4 *Korlátok a topológia eszközeinek alkalmazásában*

Végezetül meg kell jegyezni, hogy a topológia eszköztárának korlátjai is vannak. Ezek következők.

A topológia eszközeivel bizonyos testek meg sem különböztethetők: például két, szemre jól elkülöníthető test, mint például egy gömb és egy kocka, vagy az egységnyi élhosszúságú kocka és az 1/100, 1 és 100 egységnyi élhosszúságú téglatest topológiailag azonosak. Ugyan a gömb leképezése kockára és az egységnyi élhosszúságú kocka leképezése az 1/100, 1 és 100 egységnyi élhosszúságú téglatestre folytonos függvényekkel megadható, de ez a leképezés nem egyeztethető össze az anyag atomi-molekuláris felépítésével: ilyen mértékű alakváltozás során az anyag atomi-molekuláris szerkezete megváltozik, a belső topológiai rend nem marad meg. (Hasonló probléma merül fel a törések és egyesítések leírása során: a vágás, a lyukkészítés, a hajtogatás, a hegesztés nem folytonos, ezért nem írható le topológikus leképezéssel. Ez utóbbiak – az anyag szakadása vagy összeillesztése – kívül esnek jelen tanulmány keretein.)

4 A METRIKA SZEREPE ÉS KORLÁTAI A KONTINUUMMECHANIKÁBAN

4.1 *A metrika szerepe a kiterjed testek jellemzésében*

Egy test alakjának a megváltozása leírható topológiai eszközökkel a szónak abban az értelmében, hogy a testnek az alak megváltozása előtti és utáni állapota között létesíthető egy topológiai leképezés. Ugyanakkor – éppen azért, mert a test alakja mind az alak megváltozása előtt és után topológiailag ekvivalens – a topológiai leírás valójában nem ad módszert az alak megváltozásának a jellemzésére, a test alakjának a különböző állapotban való megkülönböztetésére. A megkülönböztetésükre szükség van egyrészt a test méreteinek, másrész a test alakjának a megkülönböztetésére. A méretek megváltozásának a leírásához szükség van metrikus fogalmakra (távolság és szög mérésére), az alak megváltozásának a leírásához szükség van a testet határoló felületek (és azok metszésvonalai) görbületi viszonyainak az ismeretére.

4.2 *Az alak megváltozása és az alakváltozás*

Először egy terminológiai kérdést kell érintenünk: az alak megváltozása és az alakváltozás nem azonos fogalmak.

Az alak megváltozása alatt az fogjuk érteni, hogy a test alakja két különböző pillanatban, két különböző állapotban nem azonos. A geometria nyelven: a test által az Euklideszi térben (különböző időpontban) elfoglalt két tartomány nem azonos, merevtestszerű mozgással nem hozhatók fedésbe. Példaként említhetjük egy vödör víz beöntését egy vályúba, egy prizmatikus rúd nyújtását, egy egyenes acélpálca körívvé hajlítását, végezetül a felcsévélt spárga lefejtését. Látható, hogy a négy különböző test alakja a kezdő- és végállapotban nem azonos, de látható az is, hogy a négy test alakjának a megváltozása nem azonos jellegű. Az első esetben a testnek nincs is alakja, hanem a testet tartalmazó edény alakja változott meg, a másodikban a test lineáris mérete változott meg (megnyúlt és persze keresztirányban kontrahálódott), a harmadikban elsősorban a test görbülete változott meg (a semleges tengely hossza változatlan maradt, az attól „jobbra” és „balra” (vagy „alatta” és „felette”) lévő „szálak” megnyúltak, illetve megrövidültek, és persze keresztirányban is változott kis mértékben a test mérete), a negyedikben a test hossza változatlan, de a térben felvett alakja függött a testre ható erőtől.

Általánosságban megállapítható, hogy vannak testek, amelyek nem képesek az alakjukat megőrizni: ilyenek a szemcsehalmazok, a folyadékok és a gázok, de ide kell sorolni néhány szilárd testet is, mint például a köteleket és a ponyvákat. (Ez utóbbiak szilárdak, mert van olyan mechanikai igénybevétel – húzás –, amellyel szemben ellenállást mutatnak.) Ezeknek a testeknek az alakját részben kinematikai peremfeltételek („edény”), részben dinamikai peremfeltételek (a testre ható erők, pl. gravitáció, vagy a gyorsuló mozgás) határozzák meg. A szemcsés közeg halmokba rendezhető, alakja függ a belső súrlódási szögtől, meg attól, hogy hogyan rendezzük annál laposabb hajlásszögű halmokba (netán edénybe tölthetjük). A folyadék csak edényben marad meg, különben szétfolyik, különböző alakú edénybe öntve a folyadékot, az felveszi az edény alakját, de annak alján (a gyorsulás iránya adja meg, mi az alja) foglal helyett. Gáz csak zárt edényben tartható össze, felveszi az edény alakját és „egyensúlyban” (az áramlást most kizárjuk) az edényt egyenletesen kitölti (ha eltekintünk a gravitációtól). A kötél és a ponyva a peremek rögzítése esetén a terhektől függően változtatja, illetve veszi föl az alakját. A fentebb ismertetett esetekben a test alakja változott meg, de alakváltozásról nem beszélünk.

4.3 *Az alakváltozás értelmezése metrikus fogalmakkal*

Az alakváltozást a metrikus méretek megváltozásával kötjük össze. Sőt, a metrikus méretnek nem az abszolút, hanem csak a relatív megváltozását értelmezzük. Egy test alakváltozásának az értelmezését több lépésre bontjuk föl (lásd Lámer 1985a., 1990., 1992-93a.)

- Egy görbe relatív nyúlása: a megnyúlt hossz és a nem megnyúlt hossz különbsége osztva a nem megnyúlt hosszal.
- A test alakváltozása globálisan: a testben megadható össze sima görbe relatív megnyúlásainak az összessége. Ebben a megközelítésben az alakváltozás „integrál” formában áll elő.
- A test alakváltozása lokálisan: koordinátavonalakkal kijelölt kicsiny tetraéder éleinek pontjai között, ez vezet a bázisvektorok relatív megnyúlásához és az általuk bezárt szög megváltozásához. Ebben a megközelítésben az alakváltozás mezőként értelmezhető.

Az alakváltozás nagysága szerint korlátozott (lásd Lámer 2006., 2007., 2008., 2010., 2012., 2013.)

- Az alak megváltozását addig tekintjük alakváltozásnak, ameddig az atomi-molekuláris rend megőrződik. Amikor az atomi-molekuláris rend nem őrződik meg, akkor átrendeződésről beszélünk.
- Az atomi-molekuláris rend megőrzése miatt az alakváltozás mértéke korlátozott: (a vizsgált anyagoktól függően) a relatív nyúlás nem lehet nagyobb, mint 1/100 – 1/1000 – 1/10000.

Ez a korlát nem csak a fizikai (mechanikai) jelenségre ad korlátot – alakváltozás vagy átrendeződés –, hanem az alakváltozást lokálisan értelmező mennyiségre is, amelyet majd alakváltozási tenzorként kívánunk értelmezni. A korlát matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a relatív nyúlás értéke az egység mellett elhanyagolható. Megjegyezzük, hogy nem linearizálunk (azaz nem a második és magasabb hatványú tagokat hanyagoljuk el az elsőfokú tag mellett), hanem az egy melletti elhanyagolható kicsiny mennyiségeket hagyjuk figyelmen kívül az elméletben (függetlenül attól, hogy a megtartott tag lineáris vagy magasabb hatványon szerepel, és függetlenül attól, hogy az elhanyagolt tag lineáris, vagy kvadratikus) (LÁMER 1985a., 1990., 1992-93a).

4.4 *A metrikus tér struktúrájának a felépítése*

A metrika, illetve a metrikához köthető további geometriai objektumok bevezetésének egy „szokásosnak” mondható értelmezésének a lépései (pl. FLÜGGE 1958., 1965., 1972., KORN–KORN 1975., LOVE 1972, LUR’E 1970, NOWACKI 1975., PAPKOVICS 1939., RASCHEWSZKIJ 1966. és LÁMER 1990). Az egyes lépéséket csak felsoroljuk, a részletek a fentebb megadott irodalmakban megtalálhatók.

- Az alapfogalom a helyvektor (az Euklideszi térben vagyunk).
- A helyvektor változása a koordinátavonalak (irány) mentén adja meg a bázisvektorokat.
- A bázisvektorok skaláris szorzata segítségével értelmezhető a metrikus tenzor.
- A bázisvektorok változása a koordinátavonalak (irány) mentén értelmezi az affin összefüggés együtthatóit.
- Az affin összefüggés együtthatóinak a változása a koordinátavonalak (irány) mentén értelmezi a görbületi tenzort. (Megjegyzés: a metrikus tenzor komponenseinek parciális differenciáljai segítségével is megadható a görbületi tenzor.)

A testek méreteit a metrikus tenzor segítségével határozzuk meg. Mivel egy (irányított) szakasz hosszát egy vektor skalárszorzatának négyzetgyökeként értelmezzük, ezért a hossz méréséhez az ívelem négyzetét használjuk, ez utóbbit a metrikus tenzor komponenseiből alkotott (differenciális) kvadratikus alak formájában adjuk meg. A szög mérésére két, egymással szöget bezáró vektor skalárszorzatát használjuk, ebben az esetben a szöget alkotó derékszögű háromszög oldalarányaira kapunk összefüggést (megszokottabb kifejezéssel élve: a szög szinusz függvényét határozzuk meg). Már most utalunk arra, hogy a kétféle méréshez a metrikus térben kétféle függvényt alkalmazunk: négyzetgyök és szinusz függvényt. Ez a megállapítás független attól, hogy a függvényekben ugyanazon metrikus tenzor komponensei szerepelnek.

A metrika értelmezésével tehát egy metrikus térben képesek vagyunk görbék hosszát és görbék által bezárt szöget meghatározni. Utalunk arra is, hogy a metrikus tenzor ismerete lehetővé teszi felületek és testek térfogatának a meghatározását is.

A test metrikus viszonyain kívül a test alakját is figyelemmel kell (kellene) kísérni. Ehhez a testet határoló felületek és a testben kijelölhető görbék görbületi viszonyait kell (kellene) nyomon követni. (Kimutattuk, hogy kis alakváltozások mellett az eltolódások nagyságától függetlenül is lehet nagy (és többnyire az is) a görbületi viszonyok megváltozása, lásd LÁMER 1985a.) A görbület nem közvetlenül a metrikus tenzorral, hanem a bázisvektoroknak egy görbe mentén való eltolása során fellépő „forgásával”, azaz az affin együtthatók segítségével írható le. Jelen tanulmányban a görbületi viszonyok megváltozásának a tényét csak érintjük, a vonatkozó összefüggéseket részletesebben nem fejtjük ki.

A térben egy test mozgásának a leírásához értelmezni kell a mozgás során a metrikus tenzor, illetve az ahhoz kapcsolódó geometriai objektumok megváltozást is. Ez adja meg a folytonos közegek kinematikájának leírását.

4.5 *A metrika és a kontinuum kinematikájának a kapcsolata*

A geometriai objektumok megváltozásának egy kontinuum kinematikájának a leírásában játszott szerepe ismertnek tételezhető fel: expliciten, vagy impliciten minden rugalmasságtani, illetve kontinuummechanikai könyv (pl. FLÜGGE 1958., 1965., 1972., LOVE 1972, LUR’E 1970, NOWACKI 1975., PAPKOVICS 1939., RASCHEWSZKIJ 1966.) ezeket a lépéseket alkalmazza, legfeljebb egyes elemeivel nem foglakozik. Az egyes lépéséket csak felsoroljuk, a részletek tekintetében az irodalomra utalunk hagyatkozunk (LOVE 1972, LUR’E 1970, RASCHEWSZKIJ 1966.), illetve (TONTI 2013., LÁMER 1984b., 1985a., 1990., 1992-93a., 1992.).

- A helyvektor változásával értelmezzük az eltolódást.
- A bázisvektor változásával értelmezzük a metrikus tenzor változását.
- A metrikus tenzor változásának a fele adja az alakváltozási tenzort. (Erre még visszatérünk.)
- Az affin összefüggés együtthatóinak a változása adja meg a koordinátavonalakon a „bázisvektor változásának” a változását. (Magyarán: ez tükrözi vissza, hogy a koordinátavonalak meggörbülnek, és az affin együtthatók értékei nem azonosak az alakváltozás előtt és után.)
- A görbületi tenzor változása adja az összeférhetőségi egyenleteket. (Megjegyezzük, hogy ha az alakváltozás előtt tetszőlegesen vennénk föl a koordinátavonalakat, akkor a görbületi tenzor

szolgálna annak az ellenőrzésére, hogy a felvett koordinátavonalak valóban az Euklideszi tér egyértelmű leírását adják.)

Általában elmondható, hogy a fenti öt állítással általánosságban minden szakirodalmi mű egyet ért. A szakirodalmi álláspontok között az eltérés abban áll, hogy az alakváltozás nagysága függvényében a harmadik állítást különbözőképpen értelmezik, vagy ha úgy tetszik „finomítják". Rendszerint az eltolódásmező gradiens tenzorának valamelyik (bal vagy jobb oldali) poláris felbontása során nyert szimmetrikus tenzort tekintik alakváltozási tenzornak. Abban az elmozdulásmező elsőrendű parciális differenciálhányadosai első és második hatványon szerepelnek. Általánosságában a szakirodalomban úgy nyilatkoznak, hogy a kvadratikus tagok megtartása esetén az alakváltozási tenzor tetszőlegesen nagy, míg ha csak a lineáris tagokat tartjuk meg, úgy csak kis alakváltozások leírására alkalmas (lásd pl. FLÜGGE 1958., 1965., 1972., LOVE 1972, LUR'E 1970., NOWACKI 1975., PAPKOVICS 1939.).

A szakirodalom egy része nem elégszik meg azzal, hogy az eltolódásmező gradiens tenzorának poláris felbontása során nyert szimmetrikus tenzort tekintse az alakváltozás tenzorának, hanem megkeresi a metrikus tenzor megváltozásának fizikai (mechanikai) tartalmát is; a részleteket lásd pl. LUR'E 1970. A fizikai tartalomnak két szempontból van a jelentősége. Az egyik elméleti. A metrikus tenzort, ahogyan azt fentebb már ismertettük, az ívelem négyzetének „tetszőleges bázisban" való felírásához értelmezzük. Ezért elméletileg meg kell mutatni, hogy egy görbe relatív megnyúlását és két görbe által beért szög megváltozását valóban ki lehet fejezni a metrikus tenzor komponenseiből „megalkotott" tenzor segítségével. A másik gyakorlati. Az alakváltozások közül elsősorban a relatív nyúlást (húzókísérletek) és a szögváltozást (csavaró kísérletek) lehet kísérletileg magvalósítani, és ezzel együtt az anyagi állandókra nézve kísérleti adatokat előállítani. A vizsgálódások (pl. LUR'E 1970.) megmutatják, hogy a metrikus tenzor főátlóbeli elemeinek a fizikai tartalma az irányvektor nyúlásával van kapcsolatban, míg a mellékátlóbeli elemeinek a fizikai tartalma két irányvektor által bezárt szöggel. Mivel a metrikus tenzor nem közvetlenül a hosszat és nem közvetlenül a szöget adja meg, így nem nyilvánvaló, hogy az alak megváltozását jellemző mennyiségek – relatív nyúlás és az irányvektor által bezárt szög megváltozása – egyáltalán összefoglalhatók-e egy tenzoriális mennyiségbe. A szakirodalmi eredmények szerint a relatív nyúlás meghatározása során a metrikus tenzor főátlóbeli komponense (pontosabban annak megváltozása) négyzetgyök alatt szerepel, míg a szögváltozás meghatározása során a metrikus tenzor mellékátlóbeli komponense (pontosabban annak megváltozása) szögfüggvényben (szinusz) szerepel (KUTILIN 1947., LUR'E 1970., LÁMER 1985a., 1990., 2003a.). A kétféle függvény – a koordináta transzformáció szempontjából – nem foglalható össze egy tenzoriális mennyiségbe. Mindkét függvényt a metrikus tenzor vonatkozó komponense szerint sorba fejtve, az első, a lineáris tagot megtartva éppen tenzoriális összefüggéseket nyerünk, de már a második tag (négyzetes, illetve köbös tag) tag megtartása eltérő függvényeket szolgáltat és az egyes komponensek koordináta transzformációja nem lesz azonos (tenzoriális jellegű). A sorba fejtés után nyert tagoknak tenzorba való összefoglalásával (illetve nem összefoglalható voltával) kapcsolatban lásd pl. KUTILIN 1947., LÁMER 1985a., 1990., 1992-93a.

4.6 *Az alakváltozás értelmezésének a feltételei és korlátjai*

A fentiek alapján az alak megváltozásának metrikus tenzorral történő leírásának van egy feltétele: a metrikus tenzor egyes, az alakváltozásokat lokálisan jellemző komponensei nem lehetnek nagyok a deformálatlan állapot metrikus tenzorának a (főátlóbeli) komponenseihez képest: fizikailag csak kicsi lehet az alakváltozás, nagy nem, de fizikailag a nagy alakváltozás nem alakváltozás, hanem átrendeződés, ahogyan erre a topológiával foglakozó részben a figyelmet már felhívtuk. Magyarán: az, hogy a metrikával csak kis alakváltozások írhatók le, összhangban van az anyag atomi-molekuláris szerkezetével és azzal, hogy az alaknak már nagynak tekinthető változása már nem hogy metrikusan, de már topológiailag sem írható le.

A kis alakváltozás kapcsán jelezzük (lásd pl. LÁMER 1985a., 1990., 1992-93a.), hogy nem lineárizálunk, hanem az l (egy) mellett az elhanyagolható tagokat minden esetben elhanyagoljuk (azaz az elméletből „töröljük"). Az 1 (egy) mellett elhanyagolható tagoknak az elméletből való „törlése" a mechanikai folyamatokkal – tökéletesen rugalmas alakváltozás – összhangban van.

A metrika és az alakváltozás kapcsolata során az alábbi eredmények említhetők (lásd pl. LOVE 1927., LUR'E 1970. , de részletesen felsorolva LÁMER 1985a.).

- Egy irány és egy környezet elfordulása független egymástól.
- A környezet elfordulása, illetve egy irány elfordulása nem független az eltolódástól.
- Az alakváltozási tenzor komponenseinek fizikai tartalma van: a főátlóbeli elemek a relatív nyúlással, a mellékátlóbeli elemek a szögváltozással állnak kapcsolatban.
- Matematikailag nem vezethető be a nagy alakváltozás tenzora (a sorfejtés második tagja már nem ad tenzort).
- Az elfordulás és alakváltozás sorba fejthető (felbontható) az eltolódásvektor gradiens tenzora szerint, a négyzetes tagok megtartásával lásd LÁMER 1985a.

- A felbontással igazolható, hogy a leképezés speciális: majdnem ortogonális a leképezés (Lámer 1985a.). Ennek kapcsán utalni kell arra, hogy a Novozsilov-féle felbontás (NOVOZSILOV 1948.) formai, a felbontásnak nincs közvetlen mechanikai és matematikai tartalma; a lehajlások értelmezés során lehet szerepe a részleges lineárizálásnak (LÁMER 1990., 1992-93b.).
- Az alakváltozás fogalmát pontosítani kell. Egy test a leképezés (a deformáció) során megváltozatja alakját globálisan, de a metrika megváltozása lokálisan is értelmezhető. A metrikus tenzor segítségével értelmezett alakváltozása lokális, egy pont környezetére vonatkozik. Ez az alakváltozás mindig kicsi. Ugyanakkor a test alakjának globálisan nagy megváltozása (egy egyenes tengelyű rudat körívvé hajlítunk) nem teszi feltételen szükségessé, hogy az alakváltozások lokálisan is nagyok legyenek (LÁMER 1985a., 1990., 1992-93a.).

5 A NUMERIKUS MÓDSZER SZEREPE ÉS KORLÁTAI AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT KONTINUUMOK MECHANIKÁJÁBAN

5.1 *A numerikus módszer alkalmazásának az elve*

A periodikus belső szerkezetű anyagok esetén az anyag mechanikai viselkedését a rácspontokban „ülő” anyagi pontok, merev testek, illetve deformálható szilárd testek és az azok között lévő kapcsolati viszonyok határozzák meg. Az anyagi viselkedésének jellegzetes tulajdonsága, hogy a rácspontokban „ülő” részecskék nem hagyják el a rácspontot (pontosabban a rácspontok körül mozognak), helyet nem cserélnek.

Formálisan a rendszert a rácspontokban értelmezett állapotfüggvények írják le. Ezeket a diszkrét értelmezési tartományú függvényeket sorba fejtjük a rácspontokat magába foglaló, beágyazó, Euklideszi térben értelmezett folytonos függvények terében. Ennek következtében az általánosított kontinuumok elméletét tekinthetjük egyfajta numerikus megközelítésnek. Ez módot ad egyrészt az általánosított kontinuumok elméletének egy szokatlan szempontból való megvilágítására, másrészt a modellek egymáshoz való viszonyainak – ugyanezen szempontból való – feltárására.

A továbbiakban az általánosított kontinuumok értelmezéséhez a numerikus módszerek két fő lépését, a bázisfüggvények lehetséges megválasztását, valamint az alkalmazható hibaelvet tekintjük át.

5.2 *Bázisfüggvények*

Azok a függvények, amelyekkel a pontos megoldást közelítjük, bázisfüggvényeknek nevezzük. A differenciálegyenletek megoldása során bázisfüggvényekként rendszerint valamilyen függvényrendszert választunk: hatványfüggvényeket, hatvány polinomokat, trigonometrikus sorokat, illetve ortogonális függvénysorokat és speciális függvényeket, vagy az adott differenciálegyenlethez (-rendszerhez) tartozó sajátfüggvényeket (lásd pl. KORN–KORN 1975.). A bázisfüggvényeknek lehet speciális megválasztása, például, hogy elégítse ki a vizsgált egyenletrendszert, vagy annak peremfeltételeit. További sajátosság lehet, hogy a bázisfüggvény tartója fedje le a vizsgált tartományt, vagy egy-egy bázisfüggvény tartója különb-külön ne fedje le, csak az összes bázisfüggvény tartóinak az uniója fedje le a vizsgált tartományt (ez utóbbi vezet a végeselemek fogalmához és a végeselemes analízishez.) Az itt említett típusú bázisfüggvények alkalmazása teszi lehetővé, hogy a differenciálegyenletek megoldását visszavezessük egy algebrai feladattá.

A bázisfüggvényeknek egy más jellegű speciális megválasztása a következő: a bázisfüggvények valamely változóban legyenek „ismeretlenek”. Ez a kétváltozós parciális differenciálegyenlet visszavezetése közönséges differenciálegyenletté Kantorovics-féle módszerének az alapja (lásd [KANTOROVICS–KRÜLOV 1953.). Ez a megközelítés általában lehetővé teszi a változószám csökkentését. Azaz a háromból két, vagy egy változóban ismeretlen bázisfüggvények alkalmazása nem algebrai feladathoz, hanem a változószám csökkentéséhez vezet. Ez az eljárás a kontinuummechanikában módot nyújt arra, hogy a héj- és rúdelméleteket a háromváltozós kontinuummechanika két- és egyváltozós, numerikus módszerként levezetett feladatának tekintsük (lásd LÁMER 1990, 1992-93b.).

A bázis megválasztásnak azt a speciális esetét kell megvizsgálni, amikor mindhárom változóban ismeretlen a bázisfüggvények. Ez vezet valamely elmélethez.

A periodikus rendszerek vizsgálat esetén a rendszer állapotát leíró ismeretlen függvények (állapothatározók) mechanikai tartalmuk ismertek: a rácspontban ülő részecskék eltolódását, elfordulását, alakváltozását jellemzik. A periodikus rendszerekre vonatkozó folytonos modell – rácskontinuum – megalkotása során a beágyazó térben értelmezett folytonos, mindhárom változóban ismeretlen függvények szerint fejtjük sorba.

A bázisfüggvények értelmezéséhez csak elvek adhatók meg (Hiszen mindhárom változóban ismeretlenek, tehát egyszerűen minden esetben azt kell írni, hogy $f(x,y,z)$.) Elvként a következő lehetőségek adhatók meg:

- mechanikai modellépítés,

- belső szabadságfokok értelmezése,
- a már alkalmazott függvények parciális differenciáljainak alkalmazása,
- alakzatok formálása és azok új egységként való kezelése.

Mechanikai modellépítés

Ez alatt azt értjük, hogy az adott rendszert valamely mechanikai testek rendszerével modellezzük. Ide tartozik egyrészt az úgynevezett helyettesítő kontinuumok, illetve a helyettesítő rúdszerkezetek. Az elsőt úgy kell elképzelni, hogy a helyettesítő kontinuum anyagi viselkedését leíró anyagállandókat úgy határozzuk meg, hogy a rácsszerkezet viselkedése (eltolódás-feszültség összefüggése) egyezzék meg a helyettesítő kontinuum anyagi viselkedésével (alakváltozás-feszültség összefüggésével). A másodikat úgy kell elképzelni, hogy a periodikus struktúrájú rendszert a rácspontokat összekötő rudakból álló rendszerrel helyettesítjük, és úgy választjuk meg a rudak anyagi állandóit (keresztmetszet, inercia, anyagi állandó), hogy rúdszerkezeti rendszer viselkedése egyezzen meg a közeg kimért anyagi viselkedésével. Megjegyzés: természetesen néhány elemi állapotban illesztjük az anyagi viselkedést leíró „görbéket” (mint pl. húzás nyomás, nyírás, hajlítás, csavarás).

Ehhez a modellalkotáshoz tartozhat a belső szerkezet modellezése mechanikai rendszerrel, lásd pl. KUNIN 1975.

Újabb kinematikai függvények: belső szabadságfokok

Ennek alapja a matematikai érvelés, az analógia alkalmazása. Formálisan jó eredményre vezet, de mivel háttérben hagyja egyrészt azt a tényt, hogy valójában numerikus módszerről van szó, másrészt azt a tényt, hogy a vizsgált rendszer eleve diszkrét, ezért az analógia során felhasznált terminológia és nyert eredmények értelmezése nem minden esetben van összhangban a vizsgált mechanikai rendszer valós tulajdonságaival.

A belső szabadságfokhoz különböző elméletben különböző fizikai (mechanikai) tartalmaz rendelnek. Például az alapváltozót tekintik az „egyensúlyhoz” tartozó mennyiségnek, a belső szabadságfok alatt az egyensúlytól való eltérés leíró mennyiségnek. Lásd pl. VERHÁS 1985.

Előfordul hogy egyszerűen primér és duál változónak tekintik az alapváltozót, illetve a belső szabadságfokot reprezentáló másodlagos változót.

A már alkalmazott függvények parciális differenciáljai

Formálisan, ha ismert egy függvény, annak ismert a differenciálja is. Ezért a függvény mellett annak differenciálját a függvénytől nem függő, „alap ismeretlenként” kezelni legkevesebb szokatlan, de mindenképpen magyarázatra szorul. A fizikai jelenséget leíró matematikai elmélet felállítása során részben a különböző rendű differenciális mennyiségek más és más fizikai tartalma révén egy elméletben előfordulhat, hogy különböző rendű differenciálok szerepelnek ugyanabban az egyenletben. Erre két triviális példát adunk.

Az elmozdulás idő szerinti második deriváltja arányos a test mozgását kiváltó erővel, az elmozdulás idő szerinti első deriváltja arányos a test mozgását lassító, a súrlódással arányos erővel.

A héj és rúdelméletben speciális, középfelületre, illetve súlytengelyre felépített koordinátarendszert használunk. A középfelületre épített koordinátarendszer egyik eleme, a normálvektor, a középfelület koordinátavonalainak a koordináták szerint változásával fejezzük ki (vektorszorzatként állítjuk elő). Azaz itt az elméletbe „fellép” egy elsőrendű derivált. E miatt, a héjelméletben a hajlításra vonatkozó differenciálegyenletek rendje megnő (megkétszereződik) a membrán állapotra vonatkozó differenciálegyenletek rendjéhez képest). A súlytengelyre épített koordinátarendszer két eleme, a normális és a binormális vektor (ez elsőt második deriváltként, a másodikat vektorszorzatként állítjuk elő). Azaz itt „belép” az elméletbe egy elsőrendű és egy másodrendű derivált. E miatt, a rúdelméletben a hajlításra vonatkozó differenciálegyenletek rendje megnő (megnégyszereződik) „membrán” (húzás-nyomás) állapotra vonatkozó szereplő differenciálegyenletek rendjéhez képest).

A periodikus rendszer vizsgálata során sem fizikai, sem geometriai indok (speciális koordinátarendszer alkamzása) nem merül fel a parciális differenciálok alkalmazására. A parciális differenciálok alkalmazásának egyik matematikai megalapozását az jelentheti, hogy a rácspontokban értelmezett függvények értékein kívül azok változása is befolyásolja a rendszer viselkedését. (A rácspontok miatt a változást a véges differenciákkal kellene értelmeznünk, de a folytonos leírás során differenciálokkal dolgozunk.) A kontinuummechanikában a folytonos eltolódásfüggvények parciális differenciálhányadosaiból képezett mennyiségeknek geometriai tartalmat – alakváltozás, elfordulás – tulajdonítunk. Ennek mintájára az első-, másodrendű parciális differenciáloknak tulajdonítható fizikai (mechanika) tartalom is.

Alakzatok formálása és azok új egységként való kezelése

A rácspontokban helyet foglaló részecskéket alakzatba csoportosítjuk, és az alakzathoz tartozó „egyedi” ismeretleneket az alakzathoz tartozó minden részecskét magába foglaló ismeretlen „mezőkké” csoportosítjuk. Ennek során rendszerint a kollektív szimmetrikus és aszimmetrikus, valamint különböző egyedi formákat különítjük el. Rendszerint a csoportosítással az alakzatra – cellára – vonatkoztatható változók az alakzat léptékében önálló tartalommal ruházhatók fel (lásd pl. négy pontra vonatkozóan a rácspontok eltolódásának csoportosítása esetén az alakzatra, azaz a „cellára” vonatkozó eltolódás, elfordulás és alakváltozás értelmezését, továbbá rácspontokban ható erők csoportosítása esetén a feszültségek, és a nyomatékok értelmezést, LÁMER 2007, bár tudjuk, hogy Lagrange analitikusan hasonló eredményre jutott a XIX. század elején).

Általánosságban említhetjük az alszerkezetek módszerét. Ennek „prototípusa” a rúdszerkezetek elméletében alkalmazott elmozdulás módszer: ebben egy-egy csomópontnak tulajdonítunk eltolódási és elfordulási szabadságfokot, a rúd két végének elmozdulása egyértelműen határozza meg a rúd belső állapotát. A módszer azzal jellemezhető, hogy nem kell a rudak összes pontjának a szabadságfokát egyidejűleg figyelembe venni. Elegendő a rácspontoknak „szabadságfokot” tulajdonítani, az azok viselkedésére nézve felírt egyenlet(rendszer) megoldása után a rácspontok elmozdulása, ezt követően a kapcsolati erők, végezetül egy-egy rúdon belül az elmozdulások és az igénybevételek egyértelműen meghatározhatók.

Az alszerkezetek módszere esetén tekintünk a rudak egy összefüggő halmazát, amelynek a peremén lévő rácspontok szabadságfokait tekintjük ismeretlen mennyiségeknek. A továbbiakban az eljárás azonos rúdszerkezet számítására bevezetett elmozdulás módszerrel. Ez így önmagában még nem ad belső szabadságfokot. Ehhez az kell, hogy az alszerkezet peremén lévő rácspontokban értelmezett „egyedi” szabadságfokokat a szimmetria és az aszimmetria elve alapján csoportosítsuk, hogy az alszerkezet peremén elhelyezkedő egy-egy vonal, vagy felület mentén az egész alszerkezetre nézve fizikailag (mechanikailag) értelmezető szabadságfokokat nyerjük. Ez analóg a fentebb a „pontokra” bemutatott csoportosítással.

Végezetül a következő lépés a helyettesítő – általánosított (?) – kontinuum létrehozása: a cellák diszkrét viselkedésével analóg kontinuum anyagi álladóinak a meghatározása.

Megjegyzés. Ez az eljárás vezethet egymásba ágyazott diszkrét – folytonos – diszkrét modellek értelmezéséhez. Ugyanis előfordulhat, hogy a helyettesítő kontinuumra vonatkozó feladatot végeselemes módszerrel, azaz diszkretizálással oldjuk meg.

Megjegyzés a sorfejtésről

A rácspontokban ülő részecske viselkedésére vonatkozó fizikai (mechanikai) tartalmat kifejező függvények a rácsállandókat is magába foglaló függvényeket – jó matematikai és fizikai (mechanikai) érzékkel szokás felvenni. Ezalatt azt értjük, hogy pl. a kollektív mozgás leírására (a rácsállandó távolságán vett periodicitás tekintve) páros, a diszkrét mozgás leírás páratlan függvényeket szokás felvenni. Részleteket lásd pl. KUNIN 1975.)

5.3 *Hibaelvek*

Azok a módszerek, amelyek segítésével az ismeretlen bázisfüggvények meghatározására vonatkozó egyenletek felállíthatók, hibaelvnek nevezzük.

Klasszikusan hibavektort és hibaelvet kell választani (lásd pl. SCHARLE 1974., 1976.). Elviekben, a klasszikus – értsd algebrai feladatokra vezető – numerikus módszereknél az ortogonalitási és a minimumfeltétel jöhet számításba. A hibavektorok és hibalevek lehetővé teszik a különböző numerikus eljárások egységes vizsgálatát (lásd pl. SCHARLE 1974., 1976).

Mivel a bázisfüggvényeknek nem hogy nem ismert a feladat differenciálegyenletéhez viszonyítva valamely sajátosságuk (egyenlet vagy peremfeltétel kielégítése stb.), de éppen az a célunk, hogy a bázisfüggvények meghatározására nézve egyenlet(rendszer)t állítsunk föl, ennek megfelelően hibaelvekként általánosságban elsősorban a fizikai megközelítést, egy-egy speciális bázismegválasztás esetén valódi hibaelvet választhatunk. A levezetés módjai a következők lehetnek:

- a differenciálegyenlet levezetése mechanikai megfontolások alapján,
- aszimptotikus módszerek,
- variációs elv,
- entrópia produkció elve,
- Lee-eljárás,
- alszerkezetek módszere.

Az egyes levezetési módszerekhez a következő megjegyzéseket fűzzük.

A differenciálegyenlet levezetése mechanikai megfontolások alapján

Ez tűnik a legszimpatikusabbnak, mert ebben az esetben a mechanikai tartalmat szem előtt tartva írjuk föl a feladatra vonatkozó egyenletrendszert. Bár általánosítás során nem minden esetben világos, hogy egy belső szabadságfoknak mondott függvény milyen matematikai és/vagy fizikai tartalommal bír. (Gondoljunk például az általánosított kontinuum egy pontjában értelmezett elfordulásra és alakváltozásra, vagy nyomatékra.)

Aszimptotikus módszerek

Egy már „kidolgozott” elmélettől való „kismértékű” eltérésre vonatkozó elméletben ismeretlen függvényeket valamely kis paraméter haladó hatványsoraként értelmezzük. Az ezekre a függvényekre vonatkozó egyenleteket éppen a kis paraméter hatványai szerint rendezzük össze, és azt követeljük meg, hogy a sorfejtés minden egye sora (a kis paraméter minden hatványára vonatkozó kifejezés) külön-külön elégítse ki a vonatkozó egyenletet.

Variációs elv

A variációs elv alapján rendszerint az „alapfeladat” variációs elvét általánosítva írják fel az új, belső szabadságfokra vonatkozó variációs elvet. Ez a gyakorlatban annyit tesz, hogy a variációs elvet kiegészítik, matematikai szerkezetét tekintve az „alapfeladatra” vonatkozó tagok struktúrájával megegyező formában felírt tagokkal, amelyeket, értelemszerűen az új, a belső szabadságfokok kifejező bázisfüggvényekkel fejezünk ki.

Megjegyezzük, hogy elviekben egy mechanikai rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer és a hozzá tartozó variációs elv kölcsönösen megfeleltethető egymásnak. Ezért a kétféle eljárás ugyanarra az eredményre kell, hogy vezessen. Ugyanakkor nem minden általánosítás során világos (legalábbis a kezdetek kezdetén), hogy az új, „belső” szabadságfokok fizikailag ténylegesen hogyan is fejtik ki hatásukat, ezért a differenciálegyenlet levezetése fogalmi nehézséget okozhat. Ugyanakkor a matematika analógia a variációs elv keretén belül ezen a fogalmi nehézségen átsegíthet. Természetesen ezt követően azt kell megjegyezni, hogy a variációs elvből nyert differenciálegyenlet vizsgálatával éppenséggel illik meghatározni (megfogalmazni) a klasszikus mechanika nyelvén az új belső szabadságfok mechanikai tartalmát.

Entrópia produkció elve

A kontinuummechanikában a variációs elv alapvetően a mechanikai viselkedés leírását foglalja magába. A kontinuumok viselkedését az esetek egy jelentős részében termodinamikai állapotjellemzők is befolyásolják. Ebben az esetben az új, belső szabadságfokokra vonatkozó egyenletek levezetésénél előtérbe kerül az entrópia produkció elvének alkalmazása (VÁN et al. 2008.). A variációs elvet és az entrópia produkció elvét egymással egyenrangú eljárásnak tekintjük.

Lee-eljárás

A kontinuumok egy típusánál, a gyengén nemlokális kontinuumok esetében (VÁN et al. 2008.) előtérbe kerül a részben független belső változók, részben a már alkalmazott változók parciális differenciáljainak alkalmazása. Az új, belső szabadságfokra vonatkozó ismeretlenek meghatározására irányuló levezetés első lépésében az entrópia produkció elvét alkalmazzák. Ezt követően a Lee-eljárás keretén belül – az ismeretlen függvényeket azok különböző rendű parciális differenciálhányadosai szerint gyűjtik csokorba, és, hasonlóan az aszimptotikus módszerhez, egy-egy csoport eltűnését megkövetelve állítanak fel az ismeretlen függvényekre nézve egyenleteket.

Alszerkezetek módszere

Az alszerkezetek módszerér a bázismegválasztás során lényegében ismertettük, lásd fentebb.

5.4 *Az általánosított kontinuumok hierarchiája*

Az általánosított kontinuumok egy lehetséges sorba rendezését ismertetjük (LÁMER 2007.) alapján.

A szakirodalomban ismeretes az anyag mechanikai modellezésének az alábbi sora:

anyagi pont – merev test – folytonos közeg – nyomatéki közeg – mikropoláris közeg – direktorok.

A sorba rendezés azon alapul, hogy egyre több szabadságfoka van a modellnek:

eltolódás – elmozdulás – eltolódásmező – elmozdulásmező – elmozdulási és alakváltozási mező – magasabb rendű alakváltozási mezők.

A leírás „egyoldalú”, a szónak abban az értelmében, hogy ugyan mind a kinematikai, mind a dinamikai szabadságfokok száma nő, de közben a testre nézve továbbra is csak erőkre és az erők nyomatékára tudunk egyensúlyi (mozgás-) egyenletet felírni. A kinematikai és dinamikai szabadságfokok tenzoriális rendje egyre magasabb, de a leírásra alkalmazott tér ponttér, és a dimenziója továbbra is három.

A fentebb megadott anyagi pont – merev test – folytonos közeg … sorban több, a sorral nehezen összeegyeztethető „ugrás” van. Ez egyik, hogy a merev test a folytonos közeg egy speciális esete, amikor is a test nem deformálódik, tehát inkább része, semmint két külön entitás. Ebből a szempontból a pont – közeg felosztás tűnik egyértelműnek, de a közegen belüli, további osztályozás ettől független. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy pontból és egy kontinuum számosságú sok pontból álló rendszerek.) A sorban a szabadságfokok száma szerint is található egy „ugrás”. Az első elemet eltolódással, a másodikat eltolódással és elfordulással, majd a harmadik elemet ismét csak eltolódással jellemezzük, és csak a negyedik elemtől kezdve lesz ismét eltolódás és elfordulás, mint szabadságfok. Ebből a szempontból az anyagi test és a merev test egyfajta (diszkrét) elemnek, a közegek egy másfajta (folytonos) elemnek tekinthető. A kétféle szempont szerint a merev test és folytonos közeg két külön csoportba tartozik, és talán nem egy sorról van szó, hanem kettőről. Ugyanakkor ki kell térni arra, hogy a merev test igazából nem kontinuum: anyagi pontok mereven kapcsolva már merev testet alkotnak, a merev test tehát nem feltétlen kontinuum. A számosság kapcsán kell megemlíteni azt is, hogy a mechanikai rendszerekhez tartoznak az anyagi pontok rendszere, a merev testek rendszere, mint például a szemcsék halmaza, vagy a kristályrácsok. Ezek a mechanikai rendszerek, mint az anyagnak közegeként való modelljei, nehezen illeszthetők be a fenti lineáris sorba.

A továbbiakban a hagyományos anyagi pont – merev test – folytonos közeg … sor helyett a mechanikai modelleknek egy táblázatba való összefoglalását mutatjuk be (id. mű).

Az anyagi pontra épülő mechanikai rendszereket az alábbi „sor”-ba rendezzük.

				merev test
anyagi pont	–	*anyagi pontok rendszere*	–	*deformálható szilárd test*
				érintkező szemcsék halmaza

Alapfogalomnak az anyagi pontot tekintjük. Az anyagi pontok rendszere alatt azt érjük, hogy az anyagi pontok nem érintkeznek (vagy legalábbis csak pillanatnyilag), de egymással kölcsönhatásban állnak (pl. Naprendszer, biliárd) A táblázat utolsó oszlopában az anyagi pontok érintkeznek egymással, az érintkezésben kapcsolati erő jön létre. Ha a mechanikai állapotváltozás során az anyagi pontok közötti távolság nem változik, akkor merev testről beszélünk. Ha a távolság változik (az anyagi pontok egymáshoz viszonyított elhelyezkedése állandó (fennáll egyfajta topológiai rend), akkor deformálható[1], esetleg hajlékony[2] szilárd testről beszélünk. Ha a mechanikai állapotváltozás során az anyagi pontok egymáson elmozdulnak, egymás között helyet cserélnek, azaz átrendeződnek, akkor érintkező szemcsék halmazáról[3] beszélünk.

Ezt követően kellene értelmezni egy olyan „anyagi pontot”, amely nem csak az eltolódásával, hanem az elfordulásával is jellemezhető, valamint nem csak erők, hanem nyomatékok is hathatnak rája. Ennek a fogalomnak a fizika más területein már vannak előzményei, ezt spinornak nevezzük. Tulajdonképpen a merev test egy ilyen spinor, csak a merev testnek véges kiterjedése van, a spinort úgy kívánjuk értelmezni, mint az anyagi pontot: kiterjedés nélküli.

				merev (félmerev) spinortest
spinor	–	*spinorok rendszere*	–	*deformálható szilárd spinortest*
				érintkező spinorszemcsék halmaza

Ezt követően kellene értelmezni egy olyan „anyagi pontot”, amely nem csak az eltolódásával és az elfordulásával, hanem belső alakváltozásával is jellemezhető, valamint nem csak erők és nyomatékok, hanem belső feszültségek is hathatnak rája. Ennek a fogalomnak a már korábban a fizikában bevezetett direktor feleltethető meg. Tulajdonképpen a deformálható szilárd test egy ilyen direktor, csak a szilárd testnek véges kiterjedése van, a direktort úgy kívánjuk értelmezni, mint az anyagi pontot: kiterjedés nélküli.

				merev (félmerev) direktortest
direktor	–	*direktorok rendszere*	–	*deformálható szilárd direktortest*
				érintkező direktorszemcsék halmaza

A fentiek alapján összeállítható egy teljes rendszer. A direktor belső tulajdonsága alapján (a tenzor rendje szerint) akár folytatható is. De csak lefelé.

[1] Deformálható: egy lapra helyezve az alakját a gravitáció hatása alatt megtartja, (támaszokat biztosítva) felterhelés során kis mértékben megváltoztatja az alakját (nyúlási, nyírási alakváltozást szenved el), leterhelésnél (rugalmasságot feltételezve) visszanyeri az eredeti alakját. Pl.: acélból készült közepesen hosszú prizmatikus test (gerenda).

[2] Hajlékony: egy lapra helyezve az alakját a gravitáció hatása alatt nem képes megtartani, (támaszokat biztosítva) a gravitációs tér kikényszerít egy egyensúlyi alakot (kötélgörbe), felterhelés során felveszi azt az alakot, amelyben a terhelő erők egyensúlyát biztosítani tudja (kötélsokszög), ennek során rendszerint nagy mértékben változtatja meg az alakját (mindemellett kis mértékben nyúlás szenved el) leterhelésnél (rugalmasságot feltételezve) visszanyeri a gravitációs tér által kikényszerített alakját. Pl.: kötél.

[3] Szemcsehalmaz: egy lapra helyezve az alakját a gravitáció hatása alatt nem képes megtartani, (támaszokat) biztosítva a gravitációs tér kikényszerít egy egyensúlyi alakot („halom”), felterhelés során felveszi azt az alakot, amelyben a terhelő erők egyensúlyát biztosítani tudja, ennek során rendszerint nagy mértékben változtatja meg az alakját, azaz átrendeződnek a szemcsék a halmazon belül, leterhelésnél (az anyagi pontok tulajdonságától függetlenül) nem nyeri vissza a gravitációs tér által korábban kikényszerített alakját. Pl.: kavicshalmaz.

				merev test
anyagi pont	→	*anyagi pontok rendszere*	→	*deformálható szilárd test*
				érintkező szemcsék halmaza
↓		↓		↓
				merev (félmerev) spinortest
spinor	→	*spinorok rendszere*	→	*deformálható szilárd spinortest*
				érintkező spinorszemcsék halmaza
↓		↓		↓
				merev (félmerev) direktortest
direktor	→	*direktorok rendszere*	→	*deformálható szilárd direktortest*
				érintkező direktorszemcsék halmaza

Megjegyzések.

1. A rendszerben a kontinuum nem szerepel. Azaz ezek a – fentebb megnevezett – rendszerek megszámlálható sok elemből állnak, legfeljebb az egyes elemek kinematikai és dinamikai szabadságfokai eltérőek (jellegűkben és számukban). A kontinuum a fentiektől eltérő fogalom. Erre vonatkozóan lásd a jelen tanulmány 3. és 4. fejezetében írtakat.

2. A mechanikában ismert elvek alapján a spinor és a direktor, mint egy pontra vonatkoztatott mennyiségek nem értelmezhetőek. Korábban a kontinuumra vonatkozó topológiai áttekintésből, illetve itt, az 5. fejezetben a periodikus rendszer folytonos vizsgálatára vonatkozó fejtegetésekből következik, hogy a fenti táblázat nem egyszerűen a pontokból, merev testekből, deformálható szilárd testekből álló merev, deformálható szilárd és hajlékony testek, valamint halmazok osztályozására vonatkozó táblázat, hanem egyúttal az általánosított kontinuumok egy lehetséges hierarchiáját is megadja.

6 ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmányban a kiterjed közegek modellezésének topológikus, metrikus és numerikus szempontjait tekintettük át.

A kiterjedt testek (mechanikai) modelljeit – anyagi pont, merev test, kontinuum, folyadék és gáz, rácskontinuumok – a valós test mozgásának a leírására vonatkozó numerikus módszer alkalmazása eredményének tekintjük. Az eljárás lényege, hogy az anyagot alkotó egyes részek egymáshoz viszonyított mozgása leírására használatos függvényeket egy numerikus eljárás bázismegválasztásnak tekintjük. Ennek folyományaképpen az azonosan eltolódó részecskék adják az anyagi pont fogalmát, az azonosan eltolódó és egy pont (tengely) körül elforduló részekék adják a merev test fogalmát. A testen belül kollektíven – folytonosan – elmozduló részecskékkel modellezhető anyagok vezetnek a kontinuum fogalmához. A testen belül az egymáshoz képest diszkréten (nem kollektíven) mozgó, az egymáshoz képest rögzített topológiai rendet megtartó részecskékkel modellezhető anyagok vezetnek a rácskontinuum, más kifejezéssel élve, az általánosított kontinuumok fogalmához. Végezetül, amikor a testen belül a topológia rend nem áll fönn (a részecskék nem egy rács rácspontjai „körül" mozognak), akkor a mozgásra nézve eloszlásokat posztulálhatunk (illetve mérhetünk ki), és az eloszlásokat felhasználva alkothatunk modelleket. Ezek vezetnek a statisztikus modellekhez.

A numerikus modell elve alapján a deformálható szilárd testek modelljeiben a topológikus, a metrikus és a numerikus szempontok játszanak szerepet. A modellalkotás során figyelembe vett topológikus, metrikus és numerikus tulajdonságok biztosítják a létrehozott modell összhangját a modellezni kívánt jelenséggel, de egyúttal megadják a modell alkalmazásának korlátait is.

A topológiai rend és néhány további topológiai tulajdonság fennállásának köszönhetően lehet a vizsgált testben – közegben – koordinátákat értelmezni, valamint a differenciál- és integrálszámítást alkalmazni. Ezen kívül a topológiai rend alapján el kell különíteni egymástól az alakváltozást és az átrendeződést. A metrika fennállásának köszönhetően lehet értelmezni az alakváltozást, és az alakváltozási tenzort. Az alakváltozások értelmezésének logikus feltétele, hogy az alakváltozási tenzor komponensei adják meg a fizikailag, kísérletekkel kimérhető méretváltozásokat. Ennek következménye, hogy az alakváltozási tenzor bevezetésének korlátjai vannak: csak kis alakváltozások esetén értelmezhető. A numerikus módszerek a periodikusan elrendezett diszkrét rendszernek a kontinuális leírása során játszanak szerepet: a bázisfüggvények felvétele, illetve a hibaelv megválasztása különböző jellegű folytonos modellhez, a szakirodalomban elterjedtebb kifejezéssel élve általánosított kontinuumhoz jutunk.

7 IRODALOM

Császár Á. 1970. *Bevezetés a topológiába*. Akadémia Kiadó, Budapest

Császár Á. 1983. *Valós analízis*. I.-II. Tankönyvkiadó, Budapest

Dugas, R. 1988. (first ed. 1955.) *A History of Mechanics*. Transl. from French by Maddox, J.R. Dover Publications Inc. Minneola, New York

Flügge S. (Ed.) 1958. Encyclopaedia of Physics. Vol. VI. *Elasticity and Plasticity*. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg

Flügge S. (Ed.) 1965. Encyclopaedia of Physics. Vol. III/3. *The Non-Linear Field Theories*. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg

Flügge S. (Chief-ed.) 1972. Encyclopaedia of Physics. Vol. VIa/2. *Mechanics of Solids* II. Ed. C. Truesdell. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg

Kantorovics L.V. – Krülov, V.I. 1953. *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest

Kelly, J.L. 1957. *General Topology*. Van Nostrand Co. Inc. Princeton, New Yersey, pp. 431

Kobayashi Sh. – Nomizu, K. 1963-69. *Foundations of Differential Ge*ometry. I-II. Interscience Publisher, N. Y. – London

Kolmogorov, A.N. – Fomin, Sz.V. 1981. *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis ele*mei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Komornik V. 2003. *Valós analízis előadások*. I.-II. Typotex, Budapest

Korn, A. – Korn, Th. 1975. *Metamatikai kézikönyv műszakiakna*k. Műszaki Könvkiadó, Budapest

Кунин, И. А. 1975. *Теория упругих сред с микроструктурой*. Наука, Москва

Кутилин, Д. И. 1947. *Теория конечных деформаций*. ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, Москва-Ленинград

Lámer, G. 1984b. Differential Geometry, as Mathematical Background of Continuum Physics = *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, II (3), pp. 17-21

Lámer, G. 1985a. Notes on the Theory of Large Displacement with Small Strain = *Periodica Politechnica* 29 (1-2), pp. 53-65

Lámer, G. 1985b. On Continuous and Discrete Mechanical Systems = *Newsletter*, Techn. Univ of Budapest, III (3), pp. 12-15

Lámer, G. 1986. Az anyag struktúráltsága és annak visszatükröződése a szerkezetek és a folyadékok mechanikájának matematikai modelljein = Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában. Tudományos Találkozó 1986. *Előadások kivonatai*, Budapest, I. kötet pp. 277-281

Lámer, G. 1990. *A kis alakváltozás mellett nagy elmozdulást sokat végző tökéletesen rugalmas héjak és rudak elméletének matematikai alapjai*. Kézirat, Budapest, (Kandidátusi disszertáció) pp.

Lámer, G. 1992-93a. A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulás végző kontinuum kinematikájáról = *Építés-, Építészettudomány* XXIII (1-2), pp. 35-59

Lámer, G. 1992-93b. Két- és egyváltozós feladatok levezetése a háromváltozós feladatból. Sajátosságai a kontinuummechanikában = *Építés-, Építészettudomány* XXIII (1-2), pp. 61- 92

Lámer, G. 1992. A szükséges és elégséges összeférhetőségi peremfeltételek meghatározása = *Alkalmazott Matematikai Lapok* **16**, pp. 99-113

Lámer, G. 1994. Folytonos és diszkrét modellek a kontinuummechanikában és a termodinamiában = In: *Termodinamikai előadások*. Szerk.: Lámer G., Eötvös L. Fiz. Társ., Budapest, pp. 76-81

Lámer, G. 2003. Large deformations: boundaries and possibilities in the mathematical descriptions = In: Prediction and Simulation Methods in Geomechanics. *Proceedings of the International Workshop* 14-15. october 2003. Ed.: F. Oka, I. Vardoulakis, A. Murakami & T. Kodaka. Technical comitte 34. of ISSMGE, Athens, pp. 117-120.

Lámer, G. 2003. Solid and soft body with and without structure = In: Quasi-static deformations of particular materials. *Proceedings of QaaDMP'03 Workshop*. 25-28 august 2003. Ed.: K. Bagi. P. Co. of BTU, Budapest, pp. 159-166.

Lámer, G. 2006. Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konferencia (Budapest, 2006. október hó 12.) Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, [*A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára* 2. kötet] pp. 145-156.

Lámer, G. 2007. Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konferencia (Budapest, 2007. november hó 15.) Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, [*A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára* 4. kötet] pp. 301-314

Lámer G. 2008. Száraz, vizes, kötött szemcsék és a folytonos közeg, avagy a szemcsétől kontinuumig = Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konferencia (Budapest, 2008. november hó 26.) Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, [*A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára* 7. kötet] pp. 271-286

Lámer G. 2010. Az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdései = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010. Konferencia (Budapest, 2010. március hó 25.) Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, [*A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára* 8. kötet] pp. 123-146

Lámer G. 2012. Az anyagtörvények, avagy a folytonosság diszkrét bája. Esszé a folytonosság következményeiről = In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2011. Konferencia (Budapest, 2012. január hó 26.) Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, [*A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára* 12. kötet] pp. 247-260

Lámer G. 2013. A topológia, a Newton-féle erőtörvény és a termodinamika szerepe a kiterjedt testek mechanikai modelljeinek megalkotásában. In: *Műszaki Tudomány az Észak-kelet Magyarországi Régióban 2013*. (Debrecen, 2013. június hó 5.): Szerk.: Pokorádi László, Debreceni Akadémia Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen pp. 360-377

Love, A.E.H. 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth ed. Cambridge, At the University Press

Лурье, А.И. 1970. *Теория упругости*. Наука, Москва

Maugin, G.A. 2013. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century*: *A Concise Historical Perspective*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York

Новацкий, В. 1975. *Теория упругости*. МИР, Москва

Новожилов, В.В. 1948. *Основы нелинейной теория упругости*. ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, Л-М

Папкоивч, П.Ф. 1939. *Теория упругости*. ОБОРОНГИЗ, Л-М

Постников, М.М. 1989., 1988. *Лекции по геометрии*. Т. III. *Гладкие многообразие*. Т. IV. *Дифференциалная геометрия*. Наука, Москва

Рашевский, М.К.: 1967. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. Наука, Москва

Riesz F. – Szőkefalvi-Nagy B. 1988. *Funkcionálanalízis*. Tankönyvkiadó, Budapest

Scharle P. 1974. A mozaikmódszer mérnöki és matematikai értelmezésének kialakulása és kapcsolatai = *Építés-, Építészettudomány* VI (3-4), pp. 261-278

Scharle P. 1976. *Építőmérnöki kontinuumfeladatok numerikus vizsgálatának néhány kérdése*. ÉTE Tudományos Közlemények 84., Budapest

Sternberg, Sh. 1965. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Yersey

Sulanke, R. – Wintgen, P. 1972. *Differential Geometrie und Faserbündel*. VEB Dautscher Verlag der Wissenschaften. Berlin

Szőkefalvi-Nagy Gy. – Gehér L. – Nagy P. 1979. *Differenciálgeometria*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Steenrood, N. 1965. *The Topology of Fibre Bundles*. Princerton University Press, Princeton, New Yersey

Tonti, E. 2013. *The Mathematical Structure of Classical and Relativistic Physics. A General Classification Diagram*. Birkhäuser Verlag, Basel - Boston – Berlin

Truesdell, C.: 1966. *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*. Sspringer, Berlin-Heidelberg - N. Y.

Ván P. – Berezovszki, A. – Engelbrecht, J., 2008. Internal Variables and Dynamic Degrees of Freedom = *J. Non-Equilib. Thermodyn*. Vol. 33. pp. 235-254.

Verhás J., 1985. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest