Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2011 (Szerk: Török Á. & Vásárhelyi B.) oldal: 247-260.

Az anyagtörvények, avagy a folytonosság diszkrét bája

Esszé a folytonosság következményeiről[1]

Lámer Géza
DE MK Műszaki Menedzsment és Vállalkozási Tanszék, lamer@lamer-es-lamer-kft.hu glamer@eng.unideb.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Az előadásban példákat hozunk arra, hogy diszkrét rendszerekben az egyes elemek – értsd atomok, molekulák, szemcsék – közötti azonos viselkedés ismeretében az anyag egészére vonatkozó anyagtörvények nélkül a test állapota (elsősorban egyensúlya) modellezhető és meghatározható. Megmutatjuk, hogy a folytonosnak tekintett és folytonos matematikai modellel leírt anyagok esetében szükségszerű, hogy az egyensúlyi állapot meghatározásához anyagi viselkedést leíró egyenleteket kelljen értelmezni.

Kulcsszavak: folytonosság, anyagtörvények

1 BEVEZETÉS

1.1 *Anyagtörvények*

Anyagi tulajdonság alatt azt fogjuk érteni, ahogyan egy anyag azt őt ért hatásra „válaszol", megváltoztatja állapotát, mi több, megváltoztatja annak a jellegét, ahogyan választ ad. Szemléletesen úgy is fogalmazhatunk, hogy az anyagi tulajdonság az, ami a hatás és a következmény „között" helyezkedik el. Anyagi tulajdonság alatt egyúttal az anyag viselkedési típusát értjük. A különböző fizikai jelenségek esetén különböző viselkedésre látunk példát. Az anyagi tulajdonsághoz fogjuk sorolni azt, ahogyan egy test külső erők hatására megnyúlik, meghajlik, elcsavarodik, hogy időben lassan szétfolyik, vagy idővel a belső erők lecsengenek, hogy kisebb mértékű hőmérsékletváltozás hatására térfogatát változtatja, hogy nagyobb arányú hőmérsékletváltozás esetén változtatja a halmazállapotát, esetleg azon belül a belső szerkezetét, az elektromos áramot vezeti vagy nem, a mágneses mezőt átereszti vagy kizárja.

Mechanikai modellekre korlátozva a megfogalmazást, a feszültség és az alakváltozás közötti legáltalánosabb, többnyire funkcionálegyenlet alakjában felírt matematikai összefüggést konstitutív egyenletnek nevezzük. (A mechanikai energia disszipálódása miatt az állapotváltozók körét növelni kell, ennek részletes vizsgálatától a jelen tanulmányban eltekintünk.)

Az idealizált anyagi viselkedésre vonatkozó matematikai összefüggéseket tekintjük anyagtörvényeknek. Az anyagtörvényt a gyakorlatban abból következtethetjük ki, hogy milyen viselkedést tapasztalunk a különféle folyamatokban. Mivel a különböző folyamatok különböző körülményeket foglalnak magukba, ezért a különböző körülmények között tapasztalt különböző viselkedésből esetleg nem magára az anyagtörvényre, hanem csak egy-egy „viselkedéstörvényre" következtethetünk. Ez utóbbit hétköznapi nyelven úgy fogalmazhatjuk meg, hogy különböző körülmények közötti anyagi viselkedést különböző egyenletekkel írhatjuk le. Úgy véljük, hogy az állapottérben – a mechanikára korlátozva a megfogalmazást –, azaz az idő, a feszültség és az alakváltozások által kifeszített térben, a különböző „viselkedéstörvények" egyrétegűen (átfedések nélkül) fedik le a teret, pontosabban annak egy összefüggő tartományát, és azok összessége adja meg az anyagtörvényt. (Ha nem egyrétegű, akkor az azt jelenti, hogy az állapottér változóit bővíteni kell, mert valamilyen, addig figyelmen kívül hagyott állapotváltozó függvényében lehet a két azonos tartományt lefedő „viselkedéstörvényt" elkülöníteni.) A továbbiakban ugyan az anyagtörvényeket tartunk szem előtt, de rendszerint az anyag viselkedését leíró egyenletekről fogunk beszélni.

[1] Jelen tanulmány a Nyíregyházi Főiskolán 2011. november hó 25-én, a Tudomány Napja alkalmából megtartott Jubileumi Tudományos Ülésen elhangzott előadás írásos változata. A tanulmánnyal a szerző Asszonyi Csaba munkássága előtt tiszteleg.

Megjegyzés. Az anyagi viselkedést leíró egyenletek megnevezésére több terminus technikus is található a szakirodalomban. Az angolszász nyelvterületen elsősorban a konstruktív, az orosz nyelvterületen inkább a fizikai egyenletek kifejezést alkalmazzák. A termodinamika egyes területein előszeretettel alkalmazzák a vezetési egyenletek kifejezést. Az anyagtörvényt pedig a konstruktív egyenleteknek az idealizált testekre vonatkoztatott értelemben használják.

Az anyagi viselkedés megfogalmazásához a különböző – folytonos – fizikai modellekben közös matematikai háttereként a differenciálgeometriát, a mögött pedig a topológiát lehet megjelölni.

1.2 *Mechanikai rendszerek*

A mechanikai rendszerekben a vizsgálat (elsődleges) tárgya a mozgás. Az egyes testek egymásra hatását erőként modellezzük; másképpen, az, ami a mozgásállapotot megváltoztatja, az a hatás az erő. A mozgás vizsgálatához magát a testet is modellezzük. A külső hatással szemben mutatott viselkedése alapján különböző mechanikai testeket értelmezünk: anyagi pont, merev test, deformálható szilárd test, folyadék és légnemű. Az egyes modellek esetén a mozgás, amit vizsgálunk, más és más: eltolódás, elfordulás, alakváltozás, áramlás és térfogatváltozás.

A mechanikai rendszerekben a deformálható szilárd testek azok a testek, amelyekben az anyagi viselkedést önálló egyenletcsoporttal („viselkedéstörvénnyel”) írjuk le. Elsősorban azt, ahogyan az erő hatására az alakváltozás végbemegy. Ennek fényében megkülönböztetjük a rugalmas, a képlékeny, a felkeményedő, a viszkózus anyagokat. Értelemszerűen elkülönítjük az ideálisan rugalmas, az ideálisan képlékeny jelleget, a lineáris és a különböző kvadratikus, köbös vagy egyéb függvénnyel leírható erő-elmozdulás összefüggéseket. A mechanikai – azon belül a szilárdságtani – tulajdonságok közé soroljuk a tönkremenetel formáit, úgy, mint a rideg törést, a képlékeny folyást, a fáradásos törést, a repedések kialakulását és felhalmozódását, a diszklokációk (és diszklinációk) létrejöttét, mozgásukat és felhalmozódásukat és az anyag tönkremenetelét, a repedezettség kialakulását és ezzel együtt az aprózódást, illetve ebben az állapotban – ha van – a teherbírást, annak mikéntjét.

1.3 *Az egyensúly*

A mérnöki feladatok egy jelentős része az egyensúlyt vizsgálja. Ebben az esetben az elsődleges feladat a testre ható erők egyensúlyának a meghatározása. Magának az egyensúlynak a meghatározása – elviekben – nem különösebben nehéz feladat. Az egyensúly feltétele, hogy az eredő erő és az eredő nyomaték legyen egyenlő zérussal. Ez – általában – nem teljesül. Valójában nem is az a kérdés, hogy vajon egy-egy erőrendszer egyensúlyban van, hanem az, hogy ha egy testre egy erőrendszer hat, akkor hogyan kell megtámasztani a testet úgy, hogy a test egyensúlyban maradjon. Mi több, a feladatot úgy tűzzük ki, hogy akkor is álljon fenn az egyensúly, ha különböző időben eltérő erők hatnak a testre. Vagyis többnyire éppen az a feladat, hogy hogyan támasszuk meg a testet úgy, hogy a legkülönbözőbb erőrendszer mellett is biztosítható legyen az egyensúly.

Ez a feladat sem különösebben nehéz, hiszen az egyensúly feltétele éppenséggel megadja, hogy hat (6), nem egy síkba eső, nem egy (illetve két) pontra mutató támasz segítségével egy merev test egyensúlya biztosítható. Ugyanakkor előfordulhat, hogy a szükséges támaszok számánál több, vagy kevesebb támasztja meg a testet. Általánosságban azt mondjuk, hogy ha az ismeretlen támaszerők száma megegyezik az egyensúlyi egyenletekkel, a rendszer statikailag határozott, ha több, akkor statikailag határozatlan, ha kevesebb, akkor statikailag túlhatározott. Az első esetben a feladat egyértelműen megoldható, a második esetben a megoldáshoz nem áll rendelkezésre elegendő egyenlet, ezért rendszerint a merev test modelljét a deformálható szilárd test modelljére cseréljük (lásd lentebb), a harmadik esetben redundánsak az egyenleteink, ha ellentmondásmentesek, akkor van lehetőség egyértelmű megoldásra: a „hiányzó” egyenlet „irányában” eleve egyensúlynak kell fennállnia.

Merev testek kapcsolódhatnak egymáshoz; a merev testek hálózata/rendszere is lehet statikailag határozott, határozatlan és túlhatározott. Ugyanakkor megkülönböztethetjük a külső és a belső határozottságot-határozatlanságot. Megjegyezzük, hogy a rúdszerkezetek és szemcsehalmazok között találhatók a merev testek olyan rendszerei, amelyek statikailag határozottak.

A deformálható szilárd testeket[2] két nagyobb csoportba oszthatjuk. Az egyikbe a statikailag határozott, a másikba a statikailag határozatlan testek tartoznak. Az első csoportba tartoznak a kötél, a rúd, ponyva és a membránhéj (azzal a megjegyzéssel, hogy a támaszviszonyok külső statikai határozottságot lehetővé teszik). A második csoportba tartoznak a tárcsa, a lemez, a hajlított héj és a háromdimen-

[2] Hangsúlyozni szeretnénk, hogy az egyensúly meghatározásáról beszélünk. Természetesen az alakváltozások, az elmozdulások meghatározásához szükség van az anyagi viselkedést leíró egyenletekre.

ziós test. Az első csoportban az egyensúly meghatározható az anyagi viselkedést leíró egyenletek nélkül, míg a másodikban csak és kizárólag az anyagi viselkedést leíró egyenletek figyelembe vételével.[3]

A közegek mechanikai viselkedésének tanulmányozása során a közegekben belső erők mezőit, kinematikai változókat, elsősorban eltolódási, elfordulási, alakváltozási mezőket értelmezünk. A közegek túlnyomó többségében a belső erők és az alakváltozások mezői között fizikai kísérletekből (és az azokat értelmező elméletből, lásd lentebb) meghatározható összefüggéseket, az anyagi viselkedést leíró egyenleteket állítunk föl. Az anyagi viselkedést leíró egyenletek felállításához a különböző fizikai viselkedésmódot visszatükröző modelleket állítunk föl, és ennek megfelelő kísérleteket végzünk el. (Magyarán: a szemmel látható jelenségeket valamilyen összefüggésbe, rendszerint szemmel nem látható, csak elméletileg értelmezett matematikai mennyiségek közötti ok-okozati kapcsolatba ágyazzuk, kvalitatív elmélet állítunk föl.) A közegek mechanikai viselkedésének a leírása során az anyagi viselkedést leíró egyenleteket szükségesnek tekintjük mind fizikai szempontból, mind a modellalkotás szempontjából. Fizikailag a különböző viselkedésmódok jól elkülöníthetők, ami különböző anyagi viselkedést leíró egyenletek (viselkedésmódok) értelmezését teszi szükségessé. A modellalkotás (azaz a matematika) szempontjából az anyagi viselkedést leíró egyenletekre szükség van ahhoz, hogy a rendszer állapotát leíró függvények meghatározására felírt egyenletrendszer legyen jól kitűzött.

Látszólag az anyagi viselkedést leíró egyenlet az anyag sajátja. Valóban, annyiban, hogy a különböző mechanikai körülmények során a különböző viselkedésű anyagokat különböző egyenletek jellemzik. A tanulmányban megmutatjuk, hogy az anyagi viselkedést leíró egyenleteknek a mechanikai rendszer állapotváltozását leíró kinematikai és dinamikai egyenletekhez csatolásának a szükségessége a folytonos közeg, mint modell, folyománya.

2 AZ ANYAGOK BELSŐ SZERKEZETE, HALMAZÁLLAPOTA ÉS EGYENSÚLYA

2.1 *Az anyagok halmazállapota és belső szerkezete közötti összefüggés*

Az anyag atomi-molekuláris struktúrával bír. Léteznek olyan anyagok is, amelyek „építő kövei” az atomi-molekuláris rendnél nagyobbak, de egyfajta belső struktúra ott is jól elkülöníthető. E belső struktúra alapján küloníthetők el az anyagok halmazállapotai. A halmazállapot és az anyag belső szerkezete között szoros összefüggés áll fenn. Mi a továbbiakban néhány halmazállapotra fordítunk figyelmet: a gázra, a folyadékra, a szemcsehalmazra és a (deformálható) szilárd testre, azon belül is a kristályrácsra.

A halmazállapot fogalma – a hétköznapi fogalmaink alapján – egyértelmű. A belső szerkezetet röviden jellemezzük. A jellemzés elsősorban a mechanikai modellezés szempontjából emeli ki az egyes halmazállapotok jellemzőit.

Gáznemű test: az egyes atomok és molekulák között többnyire nincs kapcsolat, csak pillanatnyi ütközés.

Folyadék: az egyes atomok és molekulák folyamatosan érintkeznek, az egyes kapcsolatok folyamatosan megszűnnek, mások folyamatosan létrejönnek.

Szemcsehalmaz: az egyes szemcsék egymáshoz viszonyított helyzete egy-egy adott terhelésre beáll, a teher elvétele után változatlan, a korábbitól eltérő terhelés hatására (újból) átrendeződik[4].

Szilárd test: az egyes egymással „érintkező” („rácshálózatban ülő”) atomok és molekulák egymáshoz viszonyított helyzete nem változik.

2.2 *Az anyagi tulajdonság és a próbatest*

Az anyagi tulajdonságok meghatározásához kísérleteket végzünk. Ehhez egyrészt tipizáljuk magát a testet, amelyet kísérletnek vetünk alá (próbatestet készítünk, vagy legalábbis azonos körülményeket biztosítunk), másrészt tipizáljuk a kísérletet (típus igénybevételeket és típus mechanikai állapotokat

---

[3] Rá kell mutatni arra, hogy a deformálható szilárd testek között van olyan is, amely alakjának megváltozása jó közelítéssel leírható a nélkül, hogy az anyagi viselkedést leíró egyenleteket alkalmaznánk: ilyen a kötél, amely terhelés hatására „beáll” a teher „irányába”, és e vizsgálat során a tényleges nyúlás figyelmen kívül hagyható. Másképpen megfogalmazva: kinematikailag határozatlan, statikailag túlhatározott a rendszer.

[4] A fenti megfogalmazás alapvetően száraz, súrlódásmentes, kötőanyag nélküli szemcsehalmazra vonatkozik azzal a feltétellel, hogy a tehermentesítés után a gravitáció nem rendezi át a halmazt. A talajmechanikából ismert, hogy a gravitáció irányába eső terhelés (épület súlya), tehermentesítés (bontás) és terhelés (új épület súlya) folyamatban a rákövetkező terhelés akkor rendezi át (tömöríti) a talajt, ha a rákövetkező terhelés értéke nagyobb a megelőzőénél.

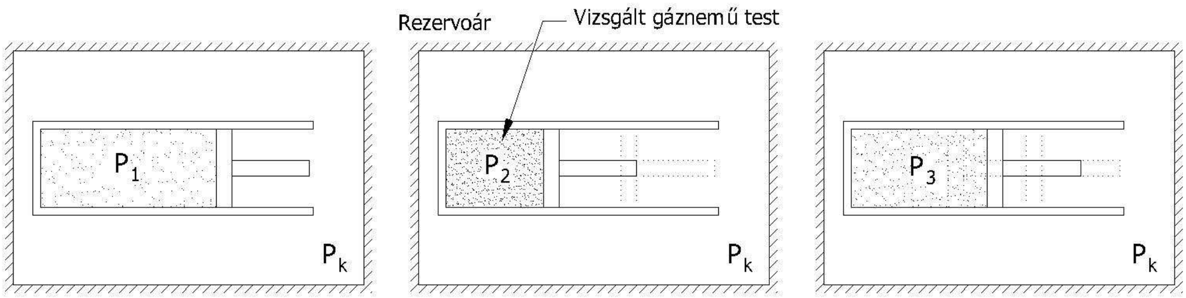
értelmezünk). A tipizálás rendszerint homogén, vagy legfeljebb lineárisan változó állapotok értelmezését foglalja magába.

A továbbiakban a deformálható szilárd testek viselkedését „letapogató” kísérleteket tartjuk szem előtt: van egy véges térfogatú anyagunk, arra hatunk külső erővel, majd megszüntetjük a terhelést („leterhelünk”) és összehasonlítjuk a test állapotát – a belső erőket és a test alakját – a kezdeti és a végállapotban. Megjegyezzük, hogy a vizsgálatok során figyelemmel kell lenni a környezetre: 1 g gravitáció, 14,5 ºC átlaghőmérséklet, és 1 atmoszféra légköri nyomás.

2.3 *Gázok*

A gázban nyomást szokás értelmezni, mint „belső erőt”. A nyomást az ütköző atomok és/vagy molekulák impulzus-cseréjével magyarázzuk. Kinematikai változóként a térfogatot szokás tekinteni (állandó tömegű gázt tételezve föl). Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a gáz állapotváltozása állandó hőmérsékleten a dinamikai és kinematikai változók között fennálló $pV = áll.$ összefüggéssel írható le.

A $pV = áll.$ összefüggést abból a szempontból tekinthetjük anyagi viselkedést leíró egyenletnek, hogy a dinamikai (p) és kinematikai (V) változók között teremt kapcsolatot. Ugyanakkor nem ad felvilágosítást arról, hogy vajon van-e különböző „anyagú” gáz, hasonlóan a rugalmas, képlékeny, viszkózus anyagokhoz. Megmutatjuk, hogy a 2.2. pontban értelmezett kísérlettípus alapján valóban nem értelmezhető. Ugyanakkor utalunk egyrészt arra, hogy a kiválasztott kísérlet a szilárd testekre lett „kitalálva”, másrész arra, hogy ettől eltérő körülmények között a különböző gázok különböző viselkedést mutathatnak.



a.) kezdeti állapot **b.)** terhelés vége állapot **c.)** leterhelés utáni állapot

1. ábra. A gázokra értelmezett, térfogatváltozással járó kísérlettípus

A gáz mibenlétéből következik, hogy a gáz állapotát, anyagi viselkedését vizsgálni csak úgy lehet, ha zárt edénybe helyezzük; rendszerint dugattyúval zárható hengerről szokás beszélni. A terhelés a dugattyúra ható erő, a változás – a hatás – a térfogat változása. Ugyanakkor a dugattyú belső súrlódása és a kültéri nyomás viszonya határozza meg, hogy a leterhelés során mi is történik. A kísérlet során feltesszük, hogy a dugattyú ideális, azaz súrlódási veszteség nem lép fel.

Legyen a gázban, a kezdő állapotban, a nyomás p_1, a terhelés vége után p_2, a környezetben uralkodó nyomás legyen p_k. A leterhelés utáni állapotban a hengerben uralkodó nyomást jelölje p_3. Ez, a kitűzött (gondolat)kísérletből következően, meg fog egyezni a külső nyomással. Két esetet különböztethetünk meg. A kezdő nyomás kisebb, illetve nagyobb, mint a végső állapotban. Ezekre nézve az alábbi esetek lehetségesek.

Elsőnek azt az esetet vizsgáljuk, amikor a kezdő nyomás kisebb, mint a nyomás a végső állapotban. Három aleset lehetséges a „leterhelésre”.

$p_k > p_2 > p_1$, akkor benyomódik a hengerbe a dugattyú annyira, hogy gázban lévő nyomás megegyezik a külső nyomással: $p_3 = p_k > p_1$.
$p_2 = p_k$, akkor nincs reakció.
$p_2 > p_k$, akkor kinyomódik a hengerből a dugattyú annyira, hogy gázban lévő nyomás megegyezik a külső nyomással: $p_3 = p_k$.
Itt további három változatot kell megkülönböztetni.

$p_2 > p_k > p_1$, akkor: $p_3 = p_k > p_1$.
$p_2 > p_k = p_1$, akkor: $p_3 = p_k = p_1$.
$p_2 > p_1 > p_k$, akkor: $p_3 = p_k < p_1$.

Az első esetben „továbbterhelés” történik, a másodikban nincs reakció, a harmadikban valamilyen „leterhelés” megy végbe, és ez utóbbiakból a 2. változat tekinthető a tökéletesen rugalmas test „analógjának”.

Másodiknak azt az esetet vizsgáljuk, amikor a kezdő nyomás nagyobb, mint a nyomás a végső állapotban. Három aleset lehetséges a „leterhelésre”.

$p_k < p_2 < p_1$, akkor kinyomódik a hengerből a dugattyú annyira, hogy gázban lévő nyomás megegyezik a külső nyomással: $p_3 = p_k < p_1$.
$p_2 = p_k$, akkor nincs reakció.
$p_2 < p_k$, akkor benyomódik a hengerbe a dugattyú annyira, hogy gázban lévő nyomás megegyezik a külső nyomással: $p_3 = p_k$.
Itt további három változatot kell megkülönböztetni.
$p_2 < p_k < p_1$, akkor : $p_3 = p_k < p_1$.
$p_2 < p_k = p_1$, akkor: $p_3 = p_k = p_1$.
$p_2 < p_1 < p_k$, akkor: $p_3 = p_k > p_1$.

Az első esetben „továbbterhelés” (pontosabban „leterhelés”) történik, a másodikban nincs reakció, a harmadikban valamilyen „továbbterhelés” megy végbe, és ez utóbbiakból a 2. változat tekinthető a tökéletesen rugalmas test „analógjának”.

Megjegyezzük, hogy más feltételek mellett más „típusviselkedés” „generálható”. Pl. a nem idealizált dugattyú esetén „maradó alakváltozás” lép fel akkor is, ha történetesen $p_2 = p_k$.

Általánosságban megállapítható, hogy a „próbatest” viselkedése függ a külső környezetnek a kezdeti és a végállapotbeli értékeitől. A klasszikus értelemben vett anyagi tulajdonságokról, mint például rugalmas, képlékeny viselkedésről, nem beszélhetünk. Ugyanakkor rá kell mutatni arra, hogy a gázok esetében azok áramlása, a gázok áramlási képének az áramlásba helyezett testek körüli megváltozása, illetve testek mozgása gázokban, továbbá felhajtóerő és örvénylések kialakulása alkotják a gázok mechanikájának a főbb kérdéseit. Ezekben a kérdésekben a gázt, mint összenyomható, többnyire súrlódásmentesen áramló folytonos közeget tekintjük. (Turbulencia esetén a folytonosság hipotézise megkérdőjelezhető.) Megjegyezzük, hogy a térfogatváltozások többnyire hőmérsékletváltozással járnak, ezért a csak mechanikai megközelítés nem tekinthető minden esetben tökéletesen megalapozottnak.

2.4 *Folyadékok*

A folyadékban szintén nyomást értelmezünk, mint belső erőt. A függőleges irányban ébredő nyomást létrejötte a folyadékoszlop súlyával magyarázható. Továbbá, fel szokás tenni, hogy a folyadékban belső nyíróerő (nyírófeszültség), nem lép fel. Ezen feltevés mellett matematikailag bizonyítható, hogy a folyadék minden pontjában, minden irányban a nyomás azonos nagyságú. Egyensúlyban lévő folyadékban a nyomás értéke a felszíntől mért mélységgel és a folyadék fajsúlyával arányos. A tapasztalat szerint a folyadékban a nyomáseloszlás az elméleti modell alapján számolttal (a mérési pontosság határán belül) megegyezik. Kinematikai változót – az egyensúlyban lévő – folyadékban nem értelmezünk.

A folyadékra jellemző, hogy egy adott tömegű (térfogatú) folyadék az edény alján gyűlik össze. Megjegyezzük, hogy „szükség van” a gravitációra, ugyanis a világűrben, a súlytalanság állapotában, a folyadék egy nagy, mozdulatlan amőbához hasonlító folyadékcsepp, amelyet a folyadék felületi feszültsége tart össze. A videofelvételek tanúsága szerint az űrhajósok az ujjukkal alakították az alaktalan folyadékcseppet.

Egy edénybe töltött, súrlódásmentesnek tekintett folyadék egyensúlyának a meghatározásához anyagi viselkedést leíró egyenletet nem szokás felállítani. Pontosabban, a nyírófeszültség „kizárásával” értelmezett ideális folyadékban igazolható, hogy minden egyes pontban hidrosztatikus nyomás lép fel, ennek okán az ismeretlen mennyiségek száma (3) megegyezik az azt meghatározó egyenletek számával (3), és az egyensúly meghatározásához az anyagi viselkedést leíró – a nyomás és a térfogatváltozás közötti kapcsolatot megadó – egyenletekre nincs szükség.

Megjegyezzük, hogy a folyadékok kismértékben összenyomhatók, de a mérnöki gyakorlatban előforduló térfogatváltozás (rendszerint) elhanyagolható.

A folyadékra nézve szokás anyagi viselkedést leíró egyenleteket értelmezni: a folyadék áramlása során az áramlással szemben mutatott „ellenállás” kapcsán szokás súrlódásmentes és súrlódásos, vagy viszkózus folyadékról beszélni.

Az anyagjellemzők meghatározásához elméletileg „próbatestet” és „standardizált” igénybevételt szokás értelmezni. A „folyás” tulajdonsága miatt a nyomással szemben mutatott tulajdonságok meghatározásához hengerbe zárva alakíthatnánk ki „próbatestet”. Ekkor a gázokhoz hasonlóan „térfogatváltozást” lehetne folyadékok esetén is értelmezni, de mint arra fentebb utaltunk, ez nem jellemezi a folyadékokat. A folyás során tapasztalható, elsősorban a rétegeknek az egymáson történő elmozdulásával (másképpen fogalmazva: a nyírásával) szemben mutatott tulajdonságok értelmezéséhez nem statikus, hanem mozgásban lévő – áramló folyadékra alakítunk ki kísérletet (amikor is a próbatest fogalma a szilárd testre megalkotott formában értelmét veszti). A gázokhoz hasonlóan az áramlás kérdései alkotják a folyadékok mechanikájának az alapvető feladatait. Ezekben a kérdésekben a folyadékot, többnyire, mint összenyomhatatlan, ritkábban, mint összenyomható, általában súrlódásosan áramló folytonos közeget tekintjük. A turbulenciára vonatkozó, a gázoknál tett megjegyzés ebben az esetben is fennáll.

2.5 *Szemcsehalmazok*

A szigorúan konvex, abszolút merev testek halmazát szemcsehalmaznak tekintjük. További egyszerűsítésekkel is élünk: két szemcse között csak az érintkezési pontban ébred erő, a súrlódás hatásától eltekintünk, és ragasztó (a szemcsék közötti húzó és nyíró erők átadását biztosító kötőanyag) meglétét kizárjuk. Feltesszük, hogy a szemcsék közel gömb alakúak és nagyjából egyforma méretűek. Végezetül feltesszük, hogy fennáll a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise (a két, illetve a három dimenzióban). Lásd Lámer (2006, 2007, 2008, 2010a, 2010b, 2010c, 2011a, 2011b).

A szemcsehalmazban belső erőnek az érintkezési pontokban ébredő erőket tekintjük. Kinematikai változónak az egyes szemcsék eltolódását és elfordulást tekintjük. Feltesszük, hogy az egyes szemcsék a körülötte lévő, gravitációs térben szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy az alatta lévő, szemcséken elcsúszhatnak, elfordulhatnak, esetleg átrendeződés során két másik szemcse közé becsúszhatnak.

A fentebb értelmezett szemcsehalmaz kinematikailag határozatlan, statikailag túlhatározott, de a rendszer egészére felírható egyenletrendszer algebrai értelemben határozott. Ezt azt jelenti, hogy anyagi viselkedést leíró egyenletek nélkül – maguk a szemcsék, azaz a testek abszolút merevek – a szemcsehalmazban ébredő belső erők és kinematikai ismeretlenek egyértelműen határozhatók meg.

Megjegyezzük, hogy nagyságrendben eltérő szemcsék esetén a rendszer továbbra is tekinthető abszolút merev testekből álló rendszernek, és ennek során az egyensúlyra felírható kinematikai és statikai egyenletek (összevont) száma éppen az ismeretlenek számával lesz egyenlő. Ugyanis egy nagy szemcse tekinthető belső, mozgó peremnek. A mozgó perem hat (6) kinematikai szabadságfokkal bír, és a rá ható, azaz azzal érintkező szemcsék esetében a globális egyensúly nem biztosított. Ugyanakkor a belső perem egyensúlyára éppen hat (6) független egyensúlyi egyenlet írható föl. Ennek okán nem csak a közel azonos szemcsékből álló szemcsehalmazokra, hanem az eltérő szemcseméretű halmazokra vonatkozóan is igaz az az állítás, hogy merev szemcsék esetén a szemcsehalmaz állapotára felírt kinematikai és statikai egyenletek a rendszer egészére nézve algebrailag határozott egyenletrendszert adnak, és önálló anyagi viselkedést leíró egyenletek felírására nincs szükség.

2.6 *Kristályrácsok*

Az anyag atomi-molekuláris szerkezetének az ismeretében úgy véljük, hogy a gáz – folyadék – szemcsehalmaz „sor” következő eleme a kristályrács.

A kristályrácsban egy-egy atom között egy erőt értelmezünk. Formálisan a két atom közötti potenciálvölgy alapján határozzuk meg a két atom között fellépő vonzó, illetve taszító erőt. Elviekben a két atom között fellépő erő a két atom közötti távolságtól függ. Valójában a feladat ennél sokkal összetettebb, hiszen a két atom közötti további atomok potenciáljai lényegében módosítják a vizsgálandó hatás-ellenhatás értékét; erre később visszatérünk. Kinematikai változónak a kristályrács pontjaiban ülő atomok eltolódásait tekinthetjük.

A fenti rendszerben „anyagi állandó” egy van: a két atom közötti erő értéke a két atom távolságának a függvényében. Valójában állapotfüggvénynek tekintjük. Ismerve, hogy az atomok közötti vonzási tartomány csak igen rövid távolságon érvényesül, valójában nem szükséges minden atom közötti kapcsolatot meghatározni, elegendő a „szomszédos”, illetve a „másod” és „harmad” szomszédokra vonatkozó kapcsolati erőket meghatározni.

A kristályrácsra vonatkozó modell megoldhatóságára és az anyagi viselkedés jellegére vonatkozó általános ismeretek a fentiek alapján a következőképpen fogalmazhatók meg.

Álljon a kristályrács – tehát a rendszer – n elemből. Hasson a csomópontokra valamely külső, egyensúlyi erőrendszer. Ismeretleneknek tekintjük az n elem d dimenziós (d = 2 síkbeli, d = 3 térbeli feladat) eltolódásvektorát, amely összesen nd ismeretlen mennyiséget jelent. Az n elem között összesen $n(n-1)/2$ ismeretlen belső erő lép fel. Ezek az egyes elemek közötti vonzási tartományok alapján, az nd ismeretlen mennyiséggel – formálisan – egyértelműen kifejezhetők. Végezetül az n elem egyensúlyára a d dimenzióban éppen nd egyensúlyi egyenlet írható föl. Azaz maga a feladat algebrai értelemben határozott. Rá kell mutatni arra, hogy az alapállapot definíciószerűen egyensúlyi, és belső erők kezdeti értékeit nem határozzuk meg, úgy is fogalmazhatnánk, hogy nincsenek, vagy ha vannak is, maga a rendszer a kiinduló állapot eltolódásairól és belső erőiről nem képes számot adni.

Megjegyzések.

A két vonzó, illetve taszító elem közötti kölcsönhatási erő explicit formában való kifejezését további vonzó, illetve taszító elemek – atomok és molekulák – jelenléte, nem teszi lehetővé. Ezért csak közelítő, numerikus módszerek állnak a rendelkezésre. Ez alól kivételt képezhet az a modell, amelyben csak a közvetlenül a szomszédos elemek közötti kapcsolatot vesszük figyelembe. Ez nem csorbítja azt a tényt, hogy n elem esetén összesen *nd* ismeretlen kinematikai mennyiség és annak meghatározására *nd* egyensúlyi egyenlet írható föl.

Az egyes elemek rögzítésére vonatkozó „peremfeltételek" esetén a kinematikai szabadságfoko(ka)t „kicseréljük" dinamikai szabadságfok(ok)ra: valamely irányú eltolódás „letiltása", „gátlása" egyenértékű azzal, hogy annak értéket előírjuk (rendszerint nullát), e helyett meghatározandó az ebben az irányban ébredő „külső" erő. Amennyiben legkevesebb hat, nem egy egyenesbe és nem is egy síkba eső, illetve nem egy egyenes-sort alkotó „támaszt" értelmezünk, akkor a külső erők nem kell, hogy egyensúlyiak legyenek, ezeket a támaszponti reakciók egyensúlyozzák.

Az egyensúly – vagy ha úgy tetszik a statika – szempontjából bevezethető a külső és a belső statikailag határozott rendszer („kristályrács") fogalma: azok a rendszerek, amelyekben a külső, illetve a belső erők csak és kizárólag a statikai egyenletekből egyértelműen meghatározhatók. Az elsőhöz az szükséges, hogy a támaszok száma éppen hat (6) legyen, a másodikhoz pedig az, hogy éppen *nd* belső erőt értelmezzünk. (Rúdszerkezeteknél ez utóbbi többnyire reális és megvalósítható feltétel, kristályrácsoknál illuzórikus ez az elvárás.)

Anyagi tulajdonságról, anyagi viselkedést leíró egyenletekről a kristályrácsok ilyen modelljében nem beszélhetünk. Amennyiben a kristályrács (az elemek topológiai rendje) a terhelés hatására átrendeződhet, valamint két elem közötti kapcsolat nem pillanatnyi, hanem időben változó, ha a két elem távolságának a függvényében adott kapcsolati erő megszűnése, új létrejötte, úgy a klasszikus értelemben vett rugalmas viselkedésen túl leírható a képlékeny folyás, a viszkózus alakváltozás és törés-szakadás jelensége is.

2.7 *Megjegyzés a deformálható szilárd testről*

A deformálható szilárd test már egy absztrakció, az atomi-molekuláris szerkezetet megtartó anyag absztrakciója; fizikailag egy, a belső szerkezetét megtartó szilárd anyagot, matematikailag az euklideszi tér egy résztartományát szokás alatta érteni.

3 A FOLYTONOSSÁG ÉS AZ ANYAGI VISELKEDÉST LEÍRÓ EGYENLETEK

3.1 *A számosság, mint a numerikus megoldás korlátja*

A nagyszámú elemből álló rendszer viselkedését előrejelző modellek gyakorlati problémája, hogy az elemek számának a növekedésével a numerikus előrejelzés nem hajtható végre: az ismeretlenek számának a növekedésével a (rendszerint algebrai, sőt, lineáris algebrai) feladat megoldása nem kereshető meg. Oka az, hogy fizikailag az egyenletrendszer megoldására nincs idő, illetve nincs (tár)hely. Megjegyezzük, hogy egyetemi hallgatóként még tanították, hogy olyan statikailag határozatlan rúdszerkezetet válasszunk, amelyben 17 ismeretlen van, ezeket csoportosítsuk szimmetrikus és antiszimmetrikus ismeretlenekre, és a 8 és a 9 ismeretlenes algebrai egyenletrendszer gyakorlatilag rövid időn belül megoldható. Ugyanakkor a rúdszerkezetek számításához már megtanítottak az algebrai egyenletet megoldó egyszerű programot készíteni, és (elviekben) már a 17-et meghaladó ismerettlennel bíró rúdszerkezet egyensúlyát is meghatároztuk. Ma tíz- és százezer ismeretlenes egyenletrendszert oldanak meg a számítógépek, de 10^{24} ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer már nem oldható meg, legalábbis a megoldás lassabb, mintha megnéznénk a természetben végbemenő folyamatokat. További nehézség, hogy a kezdeti állapot meghatározása gyakorlatilag nem valósítható meg: ha másodpercenként egy elem összes kezdeti értékét megmérnők (már ez is irreális), akkor is a 10^{24} másodperc, nagyjából $3 \cdot 10^{16}$ év szükséges az egyenletrendszer peremfeltételeinek a meghatározásához. Gyakorlati lehetetlenségét magyarázni nem szükséges.

3.2 *A folytonosság, mind a modellezés matematikai alapgondolata*

3.2.1 A fizikai jelenség – makroszkopikus szinten

A különböző anyagi testeket megfigyelve azt látjuk, azt tapasztaljuk, hogy azok – mármint az anyagi testek – a külső hatások alatt úgy változnak meg, hogy közben a testek globálisan, makroszkopikusan megfigyelt jellemzői nem változnak meg, hétköznapi tapasztalat alapján folytonosak: nem szakadnak szét, látszólag az anyag egyes részeinek együvé tartozása, mint állapot, nem változik meg.

A meghajlított deformálható szilárd test – a rugalmas tartományban – megtartja szilárdságát, méretét kis, alakját esetleg nagy mértékben változtatja meg. (A körívvé hajlított egyenes pálca hossza változatlan, alakja egyenesből körívvé változik.) A deformálható szilárd test képlékeny alakváltozása során – (próba)pálca nyújtása képlékeny „nyak” kialakulásával, dróthúzás, hengerlés, képlékeny húzás (edény készítése), kovácsolás, lemezdomborítás – az anyagot folytonosnak tekintjük, mivel a képlékeny alakítás előtt és után ugyanarról az anyagról van szó, az alakítás során a folytonosság nem szakad meg. Rugalmas alakváltozásnál az anyagot alkotó atomok egymáshoz viszonyított rendje változatlan, a képlékeny alakváltozás és/vagy alakítás során az atomok egymáshoz viszonyított rendje lokálisan megváltozik, az atomok átrendeződnek, de globálisan változatlan a rend. A különböző idealizált anyagi viselkedést egyfajta egységes megközelítésben tárgyalható a metrika és az objektivitás egyidejű figyelembevételével, amely elsősorban a deformációnak egyfajta egyértelmű meghatározását teszi lehetővé (lásd Fülöp és Ván, 2010).

A szemcsék rendszerét eleve két nagyobb csoportba, a kötött és szabad szemcsés halmazokban osztjuk (az felosztás „elvét”, és a „kötött” szakkifejezést” a talajmechanikából vettük kölcsön). A kötött szemcsés halmazt gyakorlatilag azonosítjuk a deformálható szilárd testekkel, a szabad szemcsés halmaz viselkedését egyes esetekben a rugalmasan deformálható szilárd testekkel. A kötött szemcsés halmazt rendszerint rugalmasan, illetve képlékenyen deformálható szilárd testnek tekintjük (alapozási feladatok), de egyes esetekben, mint például cölöp leverése, lokálisan átrendeződő, azaz lokálisan képlékenynek, míg a fazekasok agyagát annak kikeverése során inkább sűrű, nagy viszkozitású folyadéknak. A szabad szemcsés halmazt a külső hatás jellege – a szemcsék átrendeződésének a típusa – szerint rugalmasan deformálható szilárd testnek (befeszült halmaz – a szemcsék rendje nem változik sehol), képlékenyen deformálható szilárd testnek (lokálisan átrendeződik – pl. cölöp vibrálása vagy leverése, illetve sajtolása esetén), folyadéknak (teljes mértékben átrendeződő halmaz, például siló töltése és ürítése, csővezetéken való szállítás) tekintjük. A deformálható szilád testként való viselkedés esetén a folytonosságot úgy értjük, hogy a szemcsék egymáshoz viszonyított rendje változatlan, az átrendeződéssel járó viselkedés során a rend lokális változását tartjuk szem előtt, és a folytonosságot úgy értelmezzük, hogy a szemcsék továbbra is szemcsékkel érintkeznek, legfeljebb nem azzal a szemcsével, amivel a külső hatás előtt érintkezett. A folytonosságnak ez a szemlélete, értelmezése az, ami az agyag keverése (gyúrása) és szemcsehalmaz áthalmozása esetén a folytonosságot megtestesíti. A kétféle halmaz felfogható egyfajta „halmazállapotként”, a kettő közötti átmenet leírására változatos fegyvertárat felvonultató erőfeszítések történnek. Lásd pl. Kunyin, 1975., Lámer (2006., 2007., 2010a), Takechi et al., (2011.

A folyadékot önthetjük, kavarhatjuk, edényből-edénybe csőrendszeren keresztül átvihetjük, sőt, kisebb-nagyobb részét kivéve belőle, majd visszatöltve a folyadék nem változik, részei egymással érintkezve folytonos közeg képét nyújtják.

A gázokról ismert, hogy abban a gázt alkotó részecskék (atomok és/vagy molekulák) nincsenek érintkezésben, csak egy-egy pillanatra érintkeznek, mégis a szemléletünk szerint a gáz valamilyen értelemben folytonos: a gázt alkotó részecskék „folytonosan”, pontosabban közel azonos eloszlásban töltik ki a – gáz, mint közeg által elfoglalt – teret, nincsenek benne olyan térrészek, amelyekből teljes mértékben hiányoznak a gázt alkotó részecskék.

Megjegyezzük, hogy a folytonosságot érzékszerveink alapján „értelmezzük”, az anyag atomi-molekuláris szerkezetű felépítésének a létezését fizikai kísérletekből „tanuljuk meg”.

Rá kell mutatni arra, hogy a folytonosságnak különböző „szintjeit” értelmezzük, mégis minden esetben ugyanazt a kifejezést – „folytonosság” – használjuk. Ugyanakkor a folytonosság melletti érvelés során már jeleztük, hogy az egyes folytonosságok nem azonos „jellegűek”. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a folytonosságra a matematikában milyen fogalom áll rendelkezésre.

3.2.2 Matematikai értelmezés

A folytonosság matematikailag – pontosabban topológiailag – úgy fogható meg, hogy a leképezés előtt közel fekvő pontok a leképezés után is közel fekszenek.

A közelséget, pontosabban távolságot a metrikus térben szokás értelmezni. A távolság lehetővé teszi mind a közelség, mind a folytonosság értelmezését: a tárgy- és képtérben értelmezett metrika alapján a folytonosságot éppen az adja meg, hogy a tárgytérben közel fekvő pontok képe a képtérben is közel fekszik. (A klasszikus $\delta - \varepsilon$ „kalkulus”.)

A topológiai tér értelmezésének egyik mozgató rugója éppen az volt, hogy a metrikus térben értelmezett, a metrikán alapuló közelséget, folytonosságot és differenciálhatóságot úgy vigye át ponthalmazra, hogy abban a metrika bevezetésére ne legyen szükség. A metrikus térben a metrika az, amely segítségével környezetet értelmeznek, majd a nyílt (illetve zárt) halmazok segítségével a környezet fogalmát újraértelmezik. A környezet fogalma az, amely a „közelséget”, azaz az egymáshoz való tartozást rögzíti. Ez a közelség nem egyszerűen azt mondja meg, hogy a pontok – metrikus értelemben – közel vannak, hanem, hogy egyfajta rendjük van: az egymáshoz viszonyított elrendezésük rögzített, ezen a leképezés nem változtat.

A ponthalmazok esetén topológiai térről akkor beszélünk, ha adott a topológia, azaz adott minden pontnak az összes környezete. A rendet a környezetek szabják meg. A topológiai vizsgálódások azt mutatják, hogy a valós számok halmazán bevezetett differenciálhatóság akkor értelmezhető egy topológiai téren, ha a topológia néhány további feltételt is kielégít. Például a pontokra vonatkozó számosságot és a pontoknak környezetekkel történő szétválaszthatóságát. (Császár, 1970, 1983)

A topológia általában homogén a szónak abban az értelmében, hogy amilyen lokálisan, olyan globálisan a ponthalmaz. A valós anyagok viszont eltérő viselkedés mutatnak lokálisan és globálisan. Mintegy különböző környezet és különböző topológiai rendek értelmezhetők az anyag fizikai viselkedése során.

3.2.3. Az anyagi viselkedés folytonossága az anyag diszkrétségének a függvényében

Az anyagok különböző fizikai viselkedésnek okát az anyagi szerkezet különböző szintű értelmezett topológiai rendjének a megmaradásával, illetve átrendeződésével kívánjuk magyarázni.

A fizikai jelenségeknek a folytonosság szempontjából való részletesebb vizsgálatát, illetve jellemzését lásd Lámer (2003).

A következő táblázatban összefoglaljuk az alakváltozások–átrendeződések és a belső topológiai rend megmaradása közötti összefüggéseket.

Anyagfajta	A topológiai rend	A rend változása
Szilárd		
struktúráját megtartja	van	megmarad
képlékeny folyás	van	a szemcsék rendje megmarad, azon belül változik
tésztadagasztás	van	nem marad meg
gumi	van (szálirányban és szálak között)	szálirányban megmarad, görbülete változik, a szálak között megszűnik és újraépül
Szemcsehalmaz		
nem egyensúlyozható	érintkezésen alapuló	átrendeződik
egyensúlyozható	érintkezésen alapuló	az érintkezési rend megmarad, és beáll az egyensúlyba
befeszült	érintkezésen alapuló	megmarad
Folyadék		
∞	van	megmarad
1	hosszú távú	változik
0	nincs	a nincs „megmarad”
Gáznemű	nincs	a nincs „megmarad”

Anyagi struktúra minden szintjén folytonos viselkedést egy és csak egy anyagi tulajdonság tükrözi vissza. Ez a rugalmas viselkedés: ez az az anyagi viselkedés, amely esetén az atomok és molekulák egymáshoz viszonyított rendje változatlan. A többi anyagi viselkedés már nem folytonos, átrendeződéssel jár, idetartozik az összes folyással jellemezhető (képlékeny és viszkózus) alakváltozások és a szemcsehalmazok átrendeződései, a töréselméletek, a díszlokációk (és diszklinációk) elmélete.

Megjegyezzük, hogy a fenti megállapítás nem minden fizikai jelenséget tükröz vissza pontosan: a kristályrácsok optikai rezgése esetén a topológiai rend elvben megmarad, de az atomok nem kollektív, hanem egyedi rezgést végeznek. Ekkor a mozgásra vonatkozó topológiai rend lokálisan „sérül”.

3.2.4 A folytonosság „következménye”

Az anyag belső strukturáltságának „szétkenése”, azaz annak a feltételezése, hogy mind az anyag, mind az anyag leképezése folytonos, lehetővé teszi, hogy az anyagot alkotó elemek számosságából fakadó matematikai nehézségeket leküzdjük. Ugyanis nem kell minden egyes, az anyagot alkotó szemcse állapotát egymástól függetlenül vizsgálni, ha ismerjük néhány valamely részecske állapotát, állapotváltozását, akkor a részecske közvetlen szomszédságában lévő részecskék állapota, állapotváltozása megadható az előbbi részecske állapotát, állapotváltozását leíró mező sorba fejtésével. A kapcsolat értelemszerűen lokálisan érvényes és differenciális.

Úgy fogalmazhatunk, hogy a folytonosság, mint az anyagi test jellemzője, meghatározza, hogy a közegben a változás differenciális legyen, ezért az összefüggések differenciálisak, az egyenletek pedig differenciálegyenletek. Folytonos közegben ez azt jelenti, hogy az ismeretlenek mezőire – jellemezzék azok a közeget kinematikailag vagy dinamikailag – vonatkozó összefüggések parciális differenciál- (vagy matematikailag azzal analóg integrál-) kifejezések lesznek, illetve az egyensúlyra (mozgásra) vonatkozó összefüggések parciális differenciálegyenletek (vagy matematikailag azzal analóg integrál-egyenletek) formájában írhatók föl.

Az egyenlet egyéb struktúráját a topológiai rendre vonatkozó további tulajdonságok határozzák meg. Erre később, a mező kisimításának a vizsgálata során térünk vissza.

3.3 *Az egyensúly*

3.3.1 A belső erők

A belső erők értelmezésénél az anyagi pont esetében bevezetett erő fogalmát tartjuk szem előtt. Mivel a folytonos közegben az „anyagi pont” – a geometria értelmében vett pont – tömeg nélküli, és tömege a közeg csak egy véges térfogatú részének van, ezért az anyagi ponthoz erőt rendelni logikailag nem megalapozott. Erőt szintén a közeg csak egy véges térfogatú részéhez, pontosabban a véges térfogat véges mértékű pereméhez lehet logikailag megalapozottan hozzárendelni. Az elv azonos a tömeg és a sűrűség kapcsolatához. Ez utóbbi esetben, a pontban értelmezzük a sűrűséget, de tömege csak véges térfogatnak van. Az erő esetében, az erő „sűrűségét” értelmezzek úgy, hogy annak egy véges felületen vett integrálja adja meg a felületen ható erővektor három komponensének a nagyságát. Mivel egy pontban három független sík értelmezhető, ezért az erő „sűrűsége” a háromszor három komponensből alkotott feszültségtenzor.

3.3.2 Az egyensúlyi egyenletek

Az egyensúlyi egyenletek értelmezésénél az anyagi pont egyensúlyára vonatkozó összefüggésekből indulunk ki: az egyensúly feltétele, hogy az anyagi pontra ható erők vetületi egyenletei teljesüljenek. Ugyanakkor a folytonos közegben az egyensúly feltételeit nem egy anyagi pontra, hanem a közeg egy véges térfogatú részére fogalmazzuk meg. Ennek okán a szóban forgó erők nem feltétlen centrálisak, ezért szükség van a nyomatéki egyenletekre is az egyensúly fennállásához. (Ez utóbbi egyenletek teljesülésének a következménye, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus.)

A háromdimenziós esetben a feszültségtenzor kilenc elemére hat (6) egyensúlyi egyenlet írható fel, ezért a feladat statikailag határozatlan. (A nyomatéki egyenletek figyelembevétele esetén a hat (6) független komponensére három vetületi egyenlet írható fel.)

Röviden úgy fogalmazhatunk, hogy a folytonos modellalkotás következménye, hogy a feladat statikailag eleve határozatlan, a test egyensúlyát csak az anyag viselkedésének a figyelembe vételével lehet meghatározni.

3.3.3 A statikailag határozott folytonos rendszerekről

A háromdimenziós feladat statikailag határozatlan. Megmutatható, hogy a dimenziószámtól és a vizsgált altér görbületétől függ a statikai határozottság és határozatlanság.

Kétdimenziós feladat esetében a feszültségtenzor komponenseinek a száma kétszer kettő, az egyensúlyi egyenletek száma három. Ha az altér sík – ez vezet a tárcsa fogalmához –, akkor a feladat statikailag határozatlan. Ha az altér görbült – ez vezet a membránhéjak és a ponyva fogalmaihoz –, akkor az altér érintősíkjára merőleges irányban egy további vetületi egyenlet írható fel: a rendszert statikailag határozottá válik. (Itt utalunk vissza, hogy tárcsa esetén az érintősíkból nem „térnek ki” a belső erők, ezért a tárcsa síkjára merőleges irányban a vetületi egyenlet automatikusan teljesül.)

Egydimenziós esetben a dimenziószám és az egyensúlyi egyenletek száma megegyezik.

Megjegyezzük, hogy a háromdimenziós térben a vizsgált „kétdimenziós” és „egydimenziós” elméletek valójában háromdimenziós elméletek, amelyekben a változószámot redukáltuk, lásd Lámer (1990, 1992-93).

3.3.4 A kinematikai oldal: eltolódás, elfordulás, alakváltozás

A statikai határozatlanság miatt az egyensúlyi egyenlet(rendszer) egyértelműen nem oldható meg. Az egyértelmű megoldásához a test alakjának megváltozásaira vonatkozó korlátozásokat figyelembe kell venni.

Egy test alakjának megváltozásait leírhatjuk a test pontjainak eltolódásával, valamint a folytonos közeg elfordulásával és alakváltozásával. Az eltolódást a test minden egyes pontjához hozzárendeljük, szinte egyértelmű analogonja az anyagi pont eltolódásának. Az elfordulást és az alakváltozást egy pontban nem értelmezhetjük. Pontosabban a test egy-egy pontjához kívánjuk kötni, de geometriai értelmezéshez nem elégséges egy pont, hanem – a feszültségtenzor bevezetéséhez hasonlóan – szükséges a test egy véges térfogatát vizsgálni. Az elfordulás esetében azért, mert a forgás a merev test egy sajátos eltolódásmezeje: az elfordulás mezőnek van egy olyan tengelye, amelyre nézve az elmozdulás mező minden eleme éppen a tengelyre merőleges síkban fekszik, a tengelyre merőleges és a tengelytől vett távolsággal arányos a nagysága. (Megjegyezzük, hogy a kontinuummechanikában megkülönböztetjük egy irány és egy pont környezetének az elfordulását.) Az alakváltozás esetén pedig azért, mert magának az alaknak a megváltozását nem egy pontban, hanem a pontot magában foglaló kisméretű téglatesten értelmezzük, mint a téglatest nyúlását és szögtorzulását.

Az eltolódásmezőhöz három ismeretlen mennyiséget, az eltolódásvektor (mező) három komponensét rendeljük. Az alakváltozási mezőhöz az elemi téglatest három nyúlását, és a téglatest szomszédos lapjainak egymással bezárt szögének a megváltozását rendeljük. Ezek együttesen egy háromszor három méretű tenzort alkotnak, amely szimmetrikus, így további hat (6) ismeretlen mennyiséget vezettünk be. Az alakváltozás-eltolódás összefüggések hat (6) összefüggést jelentenek, az alakváltozási mező hat (6) (független) komponensét fejezzük ki az eltolódásmező három komponensével. (Csak kis alakváltozásra, lásd Lámer (1985, 1990, 1992-93a).

Összességében úgy áll a helyzet, hogy a kinematikai oldal figyelembe vételéhez kilenc új mennyiséget vezettünk be, de közöttük csak hat (6) összefüggést írunk föl. Az összefüggések azzal jellemezhetők, hogy egyik irányban „határozottak”, azaz az eltolódások ismeretében az alakváltozások egyértelműen határozhatók meg, de fordítva nem: az alakváltozások ismertében az eltolódásvektorok egyértelműen nem határozhatók meg. Az egyértelműség biztosításához teljesülniük kell az összeférhetőségi (integrálhatósági) feltételeknek. Csak utalunk arra, hogy az összeférhetőségi egyenletek száma hat (6), de három elegendő lenne. Ez a Shouthwell-paradoxon, feloldását, lásd Lámer (1992).

Végezetül rá kell mutatni arra is, hogy önmagában a kinematikai oldal vizsgálata nem visz közelebb az egyensúly meghatározásához, szükség van arra, hogy a kétféle egyenletrendszert összekapcsoljuk.

3.3.5 Az anyagi viselkedést leíró egyenletekről

A folytonosságon alapuló modell statikailag határozatlan. A kinematikai oldal önmagában a rendszer határozottságát nem csökkenti, sőt növeli. Ugyanakkor mind a belső erőket, mind az alakváltozásokat jellemző matematikai objektum azonos struktúrájú, ezért az várható, hogy a két szóban forgó objektum – a feszültségi és az alakváltozási tenzorok komponensei – között egyértelmű megfeleltetést tudunk létrehozni, akkor a rendszerünk – algebrai értelemben – határozott lesz, a kitűzött (peremérték-) feladat egyértelműen megoldható lesz.

A fentiekben rámutattunk arra, hogy az anyagi viselkedést leíró egyenletek alkalmazásának szükségessége a folytonosság hipotézisén alapul.

3.4 *A mező kisimítása, avagy a diszkrét jelenségek modellezése folytonos mezőkkel*

Jelen bekezdés kitérő, amennyiben arra mutatunk rá, hogy sorfejtés és a mező kisimítása rokon fogalmak, Lámer (2006, 2007, 2008., 2010a). Egyúttal megmutatjuk, hogy a folytonos modell hogyan tehető alkalmassá egyes diszkrét jelenségek modellezésére. Megjegyezzük, hogy jelen gondolatkörben a folytonosságot tartjuk szem előtt, ugyanakkor az átlagokkal is értelmezhetők mezők, többnyire folytonos mezők.

Elsőnek arra mutatunk rá, hogy a háromdimenziós térben egy téglateste vizsgálva négy homogén alakváltozási és ezzel együtt négy homogén feszültségi állapotot szokás megkülönböztetni. Ezek a következők. A húzás-nyomás, tiszta nyírás, hajlító nyomaték a hozzá tartozó hajlítási nyíróerővel, és csavaró nyomaték. Megjegyezzük, hogy a húzást-nyomást és tiszta nyírást rendszerint három-három irányban értelmezzük, hajlítást és csavarást ennél kevesebb irányban. A rúdelméletben két hajlítási és egy csavarási állapot, a héjelméletben (és a lemezelméletben) két hajlítási állapot lép(het) fel. A rúdelméletben a hajlítás állapot a hajlító nyomatékot és a hajlítási nyíróerőt foglalja magában, a csavarási állapot csak a csavaró nyomatékot. A héjelméletben a hajlítási állapot magába foglalja a hajlító nyomatékot, a hajlítási nyíróerőt és a csavaró nyomatékot. Önálló csavarási állapot nem létezik. Megjegyezzük, hogy a kétféle modellben (a háromváltozós állapot két-, illetve egyváltozós közelítésében) más és más nyírófeszültség-eloszlás adja meg a csavaró nyomatékot.

Ezt követően áttekintjük a mező kisimítására és a diszkrét jelenségek modellezésére vonatkozó matematikai lehetőségeinket.

Egy kristályrács diszkrét értelmezési tartományú állapotfüggvényeit sorba fejtve egy 2×2×2 elemén, a folytonos modellel analóg fizikai tartalom feleltethető meg nekik (Lámer 2006., 2008., 2010a). A több elemből álló rendszerek már olyan konfigurációkat szolgáltatnak, amelyek a folytonos modellben már nem értelmezhetők. A kollektív mozgásnak megfelelő konfigurációk adják a (klasszikus) kontinuum modelljét, folytonos viselkedés leírásra alkalmas modellt nyerünk. A nem kollektív, azaz diszkrét konfigurációk adják rácskontinuum modelljét, az egyedi, a diszkért rendszer leírására alkalmas modellt nyerünk. Elsősorban akusztikus rezgések leírására lesz alkalmas a modell. Megjegyezzük, hogy formálisan parciális differenciálegyenleteket nyerünk, az egyenlet rendjének a száma megduplázódik, éppen a sorfejtés miatt (Kunyin, 1975.).

A súlyvonalra, illetve középfelületre felépített rúd-, illetve héjelmélet egyensúlyára vonatkozó egyenletek rendje megduplázódik, mivel az egyenletekben figyelembe vesszük a koordinátarendszer érintő vektorait, amely a vizsgált altéren értelmezett érintővektorokkal fejezhetők ki. Ez az összefüggés már egy parciális deriválást tartalmaz, ezért nő meg az egyenlet rendjének a száma.

A háromdimenziós feladatoknak sorfejtésén alapuló rúd- és héjelméleteiben olyan belső feszültségeloszlásokat értelmezünk, amelyeket nem tudunk önálló konfigurációként értelmezni, azaz nem tudunk a háromdimenziós állapotra vonatkozó „elemi” állapotként értelmezni. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a fenti hat (6) alakváltozási-feszültségi párt megtartva magasabb rendű nyomaték fogalmát vezetjük be, és megadjuk annak a sorfejtésen alapuló értelmezését (pl. Antman, 1972, Naghdi, 1972, Vékua, 1978).

A háromdimenziós térbe (de alacsonyabb dimenzióban is hasonló a helyzet) a mozaikmódszer esetében az érintkező lapokon a különböző mezők folytonosságát, sőt, differenciálhatóságát meg kell követelni ahhoz, hogy a nyert közelítő megoldás a folytonosság feltételét elégítse ki. Mozaikként – a bázisfüggvények értelmezési tartományaként – a téglatestet választva az eltolódásmezők és a feszültségi mezőkre vonatkozó „bázisfüggvények” közül egyeseknek adható a folytonos modellben megszokott „fizikai tartalom” (mint pl. eltolódás, elfordulás, húzás-nyomás, hajlítás stb.), de ettől eltérő tartományra osztás, valamint magasabb rendű folytonosság megkövetelése esetén a bázisfüggvények száma messze meghaladja azt a számot, amelyhez fizikailag világos tartalom lenne köthető. Egyszerűen a sorfejtés során alkalmazott bázisfüggvényekről beszélhetünk.

A diszkrét viselkedés, strukturált belső rendszer – elsősorban szemcsézettség – esetén, intuitív módon levezetett folytonos modellt szokás alkalmazni. Ennek matematikai alapja, hogy a folytonosság kifejezéséhez nem csak az első differenciált, hanem a második, netán a magasabb differenciált is figyelembe veszik. Megjegyezzük, hogy a magasabb differenciálok esetében megkísérelték az állapotokat a fentebb már említett hat (6) elemi állapot mintájára értelmezni, de korábban már említet értelmezési nehézségekkel kellett szembe nézni.

Végezetül utalunk még egy érdekes tényre. A kísérleti megfogalmazásban hat (6) elemi alakváltozásra és a hozzá tartozó hat (6) elemi feszültségállapotra (három húzás-nyomás és három tiszta nyírás) vonatkozóan vannak kísérleti vizsgálati lehetőségek és eredmények. A második hatra vonatkozóan (hajlítás és csavarás) is értelmezhetőek kísérleti lehetőségek, de a rá vonatkozó anyagi álladókat az első hat (6) kísérletből egyértelműen meghatározott állandókkal összhangban mérhetők ki. (És fordítva, a második hatból nyerhető anyagi állandókat éppenséggel az első hatban értelmezett anyagi állandók meghatározására alkalmazzuk, lásd különös tekintettel a csavarási állandó meghatározását.) Ugyanakkor a magasabb rendű elméletekre vonatkozó szakirodalomból ismert, hogy a több tucat, netán több száz anyagi állandó meghatározásához nem szükséges több tucat, illetve több száz független kísérletet elvezni, mert azok a sorfejtés módszeréből következően sorfejtésből adódnak (Kunyin, 1975). A kísérleti vizsgálódások ezt messzemenően igazolták, mivel a sorfejtéssel nyerhető (különböző nyomatéki, direktor- és magasabb rendű kontinuum-) elméletek keretén belül anyagi álladókat nem sikerült kimérni

(Eringen 1970, 1998; Nowackij, 1970). Ennek okát nem a kísérletek hiányosságaiban, hanem az elméleti eredmények háttérbe szorulásában véljük felfedezni.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző ezúton fejezi ki köszönetét Asszonyi Csabának, Szoboszlai Bélának és Ván Péternek a tanulmány elkészítése során adott szakmai tanácsaikért.

IRODALOM

Antman, S.S., 1972. *The Theory of Rods.* Encyclopaedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. VIa/2: 641-703, Springer.

Császár Á., 1970. *Bevezetés a topológiába.* Akadémia Kiadó, Budapest

Császár Á., 1983. *Valós analízis.* I.-II. Tankönyvkiadó, Budapest

Eringen, A.C., 1970. *Foundations of Micropolar Thermoelasticity.* Springer, Wien – New York

Eringen, A.C., 1998. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids.* Springer.

Fülöp, T.; Ván P. 2010: *Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása, Idő és térderiváltak anyagtörvényekben,* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010, szerk. Fülöp T. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 10: 99-151;

Кунин, И. А., 1975. *Теория упругих сред с микроструктурой.* Наука, Москва

Lámer G., 1985b. Notes on the Theory of Large Displacement with Small Strain = *Periodica Politechnica – Ser. Civil Eng.* **29** (1-2): 53-65

Lámer G., 1990. *A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulásokat végző tökéletesen rugalmas héjak és rudak elméleteinek matematikai alapjai.* Kandidátusi értekezés. (Kézirat) Budapest

Lámer G., 1992. A szükséges és elégséges összeférhetőségi peremfeltételek meghatározása. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 16: 99-113

Lámer G., 1992-93a: Két- és egyváltozós feladatok levezetése a háromváltozós feladatból. Sajátosságai a kontinuummechanikában. *Építés-, Építészettudomány* XXIII (1-2): 61- 92

Lámer G., 1992-93b.: A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikájáról. *Építés-, Építészettudomány* XXIII (1-2): 35-59

Lámer G., 2003. Solid and soft body with and without structure = In: *Quasi-static deformations of particular materials.* Proceedings of QuaDMP'03 Workshop. 25-28 august 2003. Ed.: K. Bagi. P. Co. of BTU, Budapest. 159-166.

Lámer G. 2006.: *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései*. In: Török Á., Vásárhelyi B (szerk): Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 145-156.

Lámer G., 2007. *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései*. In: Török Á., Vásárhelyi B (szerk): Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 301-314

Lámer G., 2008. *Száraz, vizes, kötött szemcsék és a folytonos közeg, avagy a szemcsétől kontinuumig* In: Török Á., Vásárhelyi B (szerk): Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 271-286.

Lámer G., 2010a. *Az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdései.* In: Török Á., Vásárhelyi B (szerk): Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 123-146

Lámer G., 2010b. *Egy szemcse egyensúlya: kinematikai határozatlanság és statikai (túl)határozottság* In: Pokorádi L. (szerk): Műszaki Tudomány az Észak-Alföldi régióban 2010. (Nyíregyháza, 2010. május hó 19.), Debreceni Akadémia Bizottság Műszaki Szakbizottsága, Debrecen 2010. pp. 53-58

Lámer G., 2010c. Szemcsék halmaza és a talaj oldalnyomása = Geotechnika 2010. (Ráczkeve, 2008. október hó 26-27.): Közháló

Lámer G., 2011a. Erővonalak edényben szabályosan elrendezett golyók halmazában. A XI. Magyar Mechanikai Konferencia (Miskolc, 2011. augusztus hó 29-31.) Konferenciakiadványa.

Lámer G., 2011b.: Szemcsehalmazok egyensúlyának és átrendeződésének az állapotegyenlete. A XI. Magyar Mechanikai Konferencia (Miskolc, 2011. augusztus hó 29-31.) Konferenciakiadványa.

Naghdi, P.M., 1972. *The Theory of Shells and Plates.* Encyclopaedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. VIa/2. pp. 425-640, Springer-

Nowackij, W., 1970. *Theory of micropolar elasticity.* Springer.

Takechi K.; Yoshida K.; Arimitsu, T., 2011, Constitutive equations for granular flow with uniform mean shear and spin fields, Condensed Matter Physics**14:** 1-22

Truesdell, C.; Noll, W., 1965. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Encyclopaedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Springer

Ván P.; Asszonyi Cs., 2006. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye II. Az általános törvényszerűségek. In: *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*. Mérnökgeológia-Kőzetmechanikai Kiskönyvtára 3. kötet. pp. 25-87. Szerk. Asszonyi Cs., Műegyetemi Kiadó, Budapest

Ván P.; Asszonyi Cs., 2008. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. In: Asszonyi Cs (szerk) *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*. Mérnökgeológia-Kőzetmechanikai Kiskönyvtára 6. kötet. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 13-50.

Ván P.; Berezovszki, A.; Engelbrecht, J., 2008. Internal Variables and Dynamic Degrees of Freedom *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **33:** 235-254.

Векуа, И.Н., 1978. *Основы тензорного анализа и теория ковариаитов*, Москва, Наука, p. 296