

Az első triaxiális vizsgálat centenáriuma – Kármán eredményeinek újraszámolása

Vásárhelyi Balázs

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar, vasarhelyib@gmail.com

Ván Péter

KFKI, RMKI, Elméleti Fizika Főosztály/BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék/Montavid Termodinamikai Kutatócsoport, vpethm@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÁS: Kármán Tódor 100 évvel ezelőtt publikálta a világon először magyarul az általa tervezett és megépített gépen végzett triaxiális vizsgálatok eredményeit. A méréseinél tudatosan rideg kőzeteket, karrarai márványt és mutenbergi homokkővet választott, melyek nyomóvizsgálatát különböző környezeti nyomáson végezte egészen 330 MPa-ig. Eredményei azt mutatják, hogy a rideg anyag képlékennyé, majd felkeményedővé válik. Jelen cikk célja emléket állítani ezen korszakalkotó mérés 100. évfordulója alkalmából, melynek eredménye meghatározó a mai kőzetmechanikában, mérnökgeológiában, ill. geofizikában. Ebben az írásban rövid történeti bemutatás után Kármán Tódor által közölt adatok felhasználásával a különböző törési elméletek alapján meghatározzuk a kőzetek törési határgörbéjét.

Kulcsszavak: tudománytörténet, kőzetmechanika, triaxiális vizsgálat, Kármán Tódor

1 BEVEZETÉS

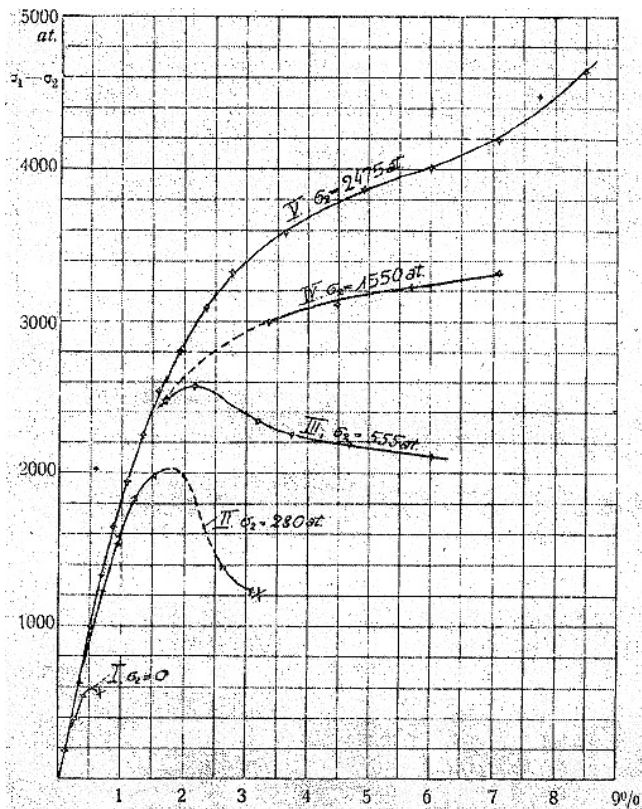
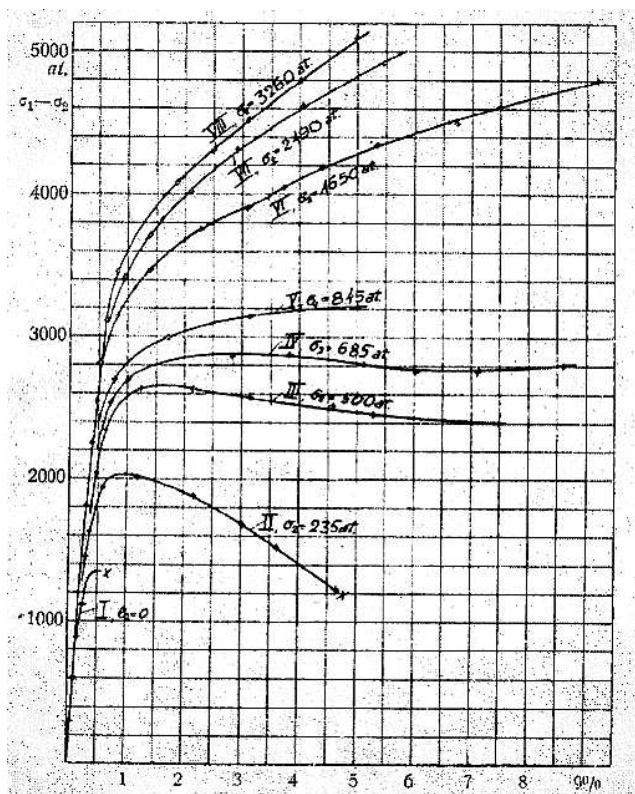
Száz évvel ezelőtt Kármán Tódor (Theodore von Kármán¹) a Magyar Mérnökök és Építészek lapjában megjelentette a rideg kőzeteken végzett kísérleteinek eredményeit. Munkáját egy évvel később németül is közreadta.

Kármán 1881-ben Budapesten született, és a BME jogelődjében, a Királyi József Műegyetemen diplomázott a gépészmérnöki karon 1902-ben. Rövid hazai munkálkodás után Heidelbergbe ment, ahol kora egyik leghíresebb tudósánál, Ludwig Prandtnál lesz tanársegéd. Ebben az időben a heidelbergi egyetemen a geológiát E. Heyn oktatja, aki előadásán felveti az addig megválaszolhatatlan problémát a gyűrött röghegységekkel kapcsolatban: a rideg kőzet hogyan alakulhatott képlékeny módon (Kármán & Edison, 1967). Kármánt érdekelte ez a kérdés, ezért megtervezte az első triaxiális gépet (ezt “bombának” keresztelte el), melyet az esseni székhelyű Krupp Művek Prandtl kérésére legyártott. Arányai alapján a gép magassága kb. 1 méter körül lehetett, melyben a próbatest átmérője 40 mm, magassága 100 mm volt (azaz az átmérő/magasság aránya 1:2,5 körül volt). Kármán részletesen elemzi, miért ezt az arányszámot választotta. A cellával lehetőség volt 6,000 atm (= 608 MPa) környezeti nyomás elérésére is, melyet glicerinnel alkalmazásával ért el. Hogy megóvja a próbatesteket a folyadéktól, nagyon vékony (0,1 mm vastag) rézlemezt használt bevonatként. Mind az erőt, mind az alakváltozást manométerekkel mérte – a mérési pontossága a mikrométeres csavarokkal 1/100 mm volt.

Eredetileg Kármán karrarai márványt és mutenbergi homokkővet vizsgált különböző környezeti nyomásokon. Az anyagválasztást az indokolja, hogy relatíve homogén és izotróp kőzetek vizsgálatára törekedett, amelyek nyomószilárdsága közönséges nyomókísérletek esetén viszonylag megbízhatóan, kis szórással meghatározható. Cikkében megjegyzi, hogy a homokkő szilárdságát jelentős mértékben befolyásolja a víztartalom, ezért minden mérést szárított próbatesten végzett el.

Számos próbálkozás után végül 10 sikeres mérése lett márványon, valamint 6 sikeres mérése homokkőn. Az 1. ábrán ezeket mérési eredményeit mutatjuk be publikációja alapján. Amint az ábrán jól látszik, a rideg kőzetek a környezeti nyomás hatására előbb képlékennyé válnak, majd felkeményedővé. Ezt mutatja a 2. ábra fényképe.

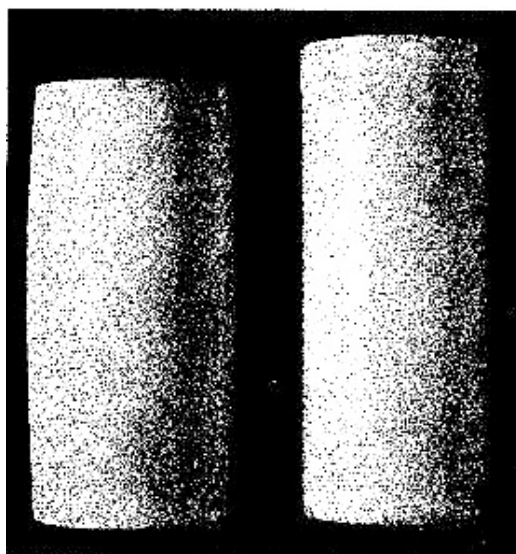
¹ Kármán Tódor édesapja Ferenc Józseftől kapta nemességét, innen a nemzetközi cikkekben használt “von” előtag. Kármán Tódor mindig precízen kirakta az ékezeteket a nevére.



a

b

1. ábra. Az effektív feszültség az alakváltozás függvényében különböző környezeti nyomás esetén, (a) karrarai márvány (b) mutenbergi homokkő (1 atm = 0.101325 MPa) (Kármán, 1910)



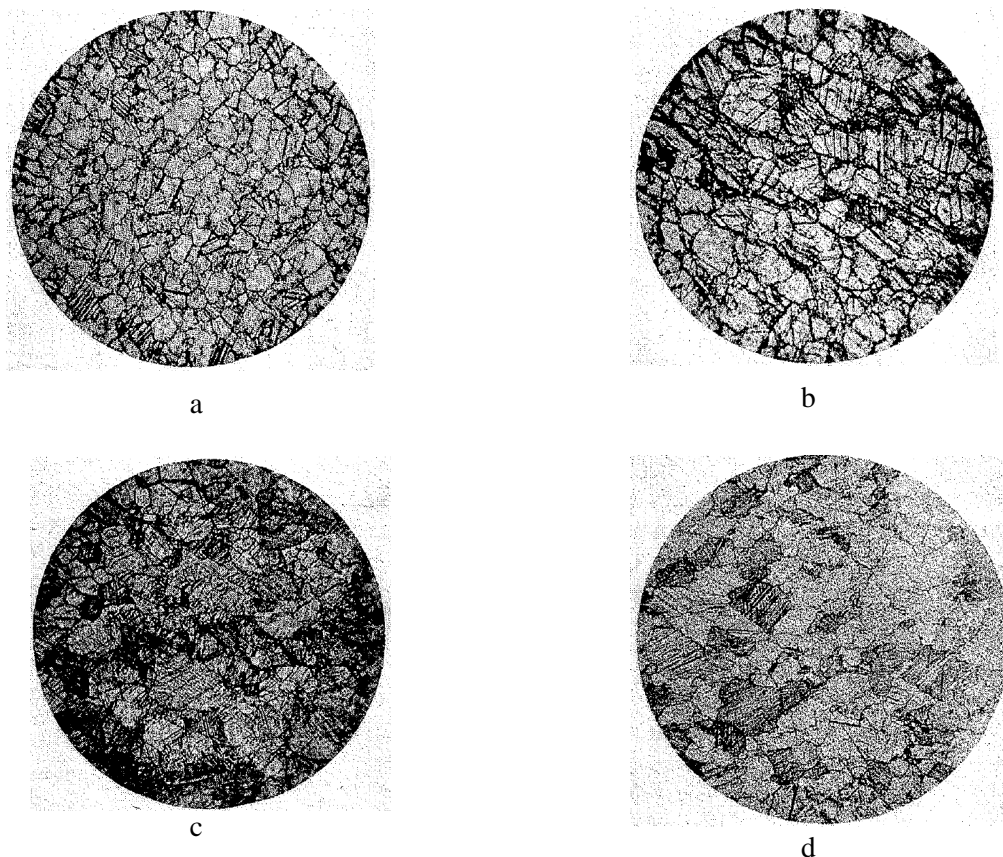
2. ábra. Az eredeti (jobb oldalon) és nagy környezeti nyomás hatására deformálódott (bal oldali) márvány próbatest (Kármán, 1910)

Meg kell jegyezni, hogy nem Kármán Tódor volt az első, aki érdeklődött a kőzetek nyomás alatti tulajdonságváltozása iránt. Az első ilyen irányú kísérleteket a prágai Kick (1892) nevéhez köthetők, aki teljesen más kísérleti módot próbált ki. Kick szintén kimutatta a rideg-képlékeny átmenetet, de csak kvalitatívan, ellentétben Kármánnal, aki kvantitatívan is megtudta határozni.

Ezen vizsgálatok alapján Kármán bemutatta, hogy a rideg anyagok tulajdonsága különböző környezeti nyomás hatására megváltozik. Ez a jelenség alapja a mai geofizikai, kőzetmechanikai, mérnök-geológiai ismereteinknek.

Megjegyezzük, hogy Mogi (1966) által javasolt, és jelenleg leginkább elfogadott rideg-képlékeny átmeneti határt (azaz $\sigma_1 = 4,4 \sigma_3$) Kármán mérési eredményei is alátámasztják: a márvány esetén $\sigma_3 = 115$ MPa környezeti nyomás (V. és VI. próbatestek mérési vonalai között) míg a homokkő esetén a III. és IV. próbatestek mérési vonalak között $\sigma_3 = 85$ MPa adódik.

A kísérletei alatt számos fényképet is készített a kőzetek kristályos szövetéről mérések előtt és után. Kimutatta, hogy rideg törés esetén az alakváltozás az ásványok között jön létre, míg képlékeny esetben az ásványok alakváltozása mutatható ki. Néhány ilyen eredményt a 3. ábrán is bemutatunk.



3. ábra. A márvány kristályok fényképei (a) vizsgálat előtt, és vizsgálat után: (b):0, (c): 51 MPa és (d) 252 MPa környezeti nyomás (σ_3) esetén

Kármán Tódor vizsgálatainak elméleti célja a Mohr hipotézisének ellenőrzése volt, azaz annak eldöntése, hogy vajon a törés határa rideg anyagok esetén is független-e a középső főfeszültség értékétől. Kísérleteiből közvetlenül semmi nem következik Mohr elméletére (két főfeszültség egyenlő), ezeket egyrészt további vizsgálatok előkészítésének szánta, másrészt pedig „ami a problémában jellegzetesnek látszik, azt velejében magában foglalja már speciális esetünk is.”.

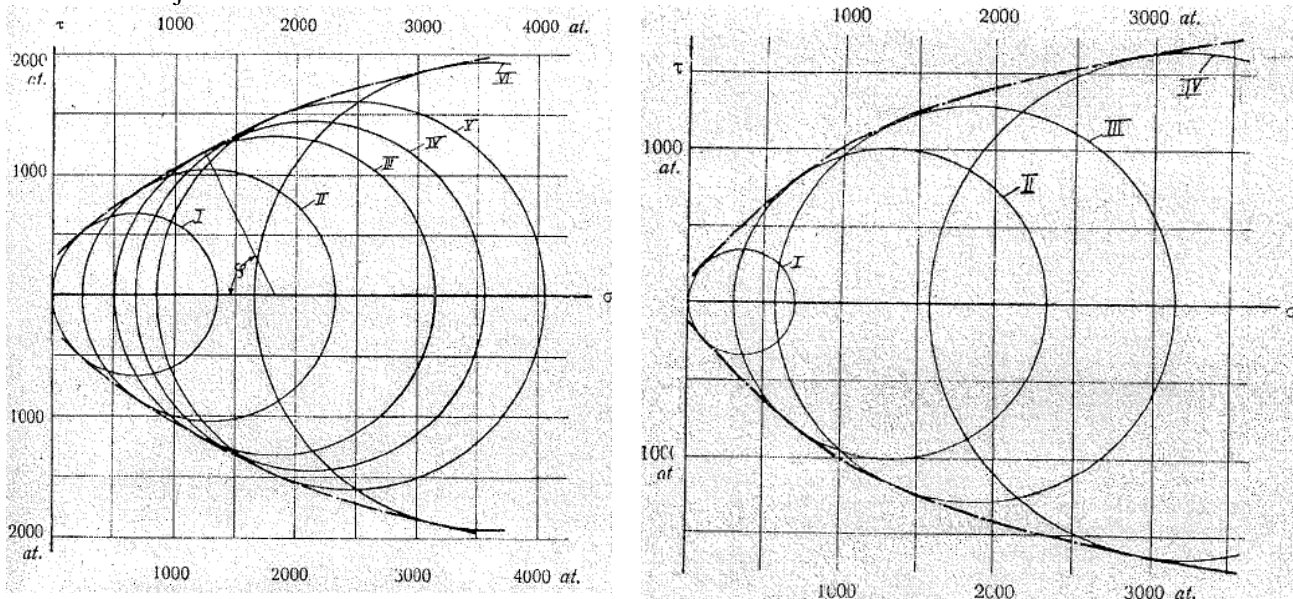
2 KÁRMÁN MÉRÉSI EREDMÉNYEINEK ÚJRASZÁMOLÁSA

Kármán (1910) közreadta az általa mért törési értékeket a környezeti nyomás függvényében. Mind a márvány, mind a homokkő mérési eredményeit újraszámoltuk a mérési görbék alapján és MPa-ban az 1. táblázatban foglaltuk össze azokat.

1. táblázat. A mért törési értékek különböző környezeti nyomás esetén a vizsgált kőzeteknél (Kármán, 1910, újraszámolt értékek) Szaggatott vonallal jelöltük a rideg-képlékeny átmeneti feszültség határokat

Próbatest száma	Karrarai márvány		Mutenbergi homokkő	
	Környezeti nyomás	Törőfeszültség	Környezeti nyomás	Törőfeszültség
	$\sigma_2 = \sigma_3$ [MPa]	σ_1 [MPa]	$\sigma_2 = \sigma_3$ [MPa]	σ_1 [MPa]
I	0	138	0	70
II	24	237	28	235
III	51	319	56	318
IV	69	361	157	491
V	86	411	251	Min. 717
VI	167	Min. 654		
VII	252	Min. 759		
VIII	330	Min. 837		

Kármán Mohr körök segítségével szemléltette mérési eredményeit. A 4. ábrán ezen törési határgörbékét mutatjuk be.

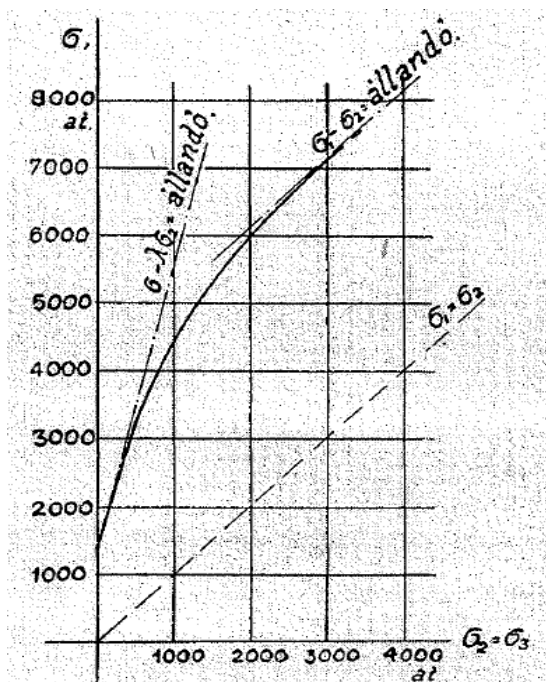


a

b

4. ábra. A vizsgált kőzetek törési határgörbéi Mohr körös ábrázolás szerint, a rugalmassági határig (a) karrari márvány és (b) mutenbergi homokkő esetén (1 atm = 0.101325 MPa) (Kármán, 1910)

A σ_1 és a σ_3 főfeszültségeket ábrázolva megállapította, hogy a $\sigma_1 - \sigma_3$ görbe a $\sigma_1 - \lambda\sigma_3 = \text{állandó}$ értékről a $\sigma_1 - \sigma_3 = \text{állandó}$ érték felé tart (lásd 5. ábra), megegyezően a fentebb említett anyagválosztási tulajdonsággal. Ezen λ értékeket Kármán nem határozta meg. Adatai alapján a márvány esetén 5,2, míg a homokkőnél 6,8.



5. ábra: A főfeszültségek közötti kapcsolat (Kármán, 1910)

Kármán idejében rideg anyagok törési határgörbéinek meghatározására nem volt elmélet és empirikus függvények sem voltak ismertek (mivel ő végezte az első kísérletet). Jelenleg számos empirikus módon megalkotott törési határgörbe függvény ismert a kőzetmechanikában. Néhányuk ezek közül meghatároztuk a paramétereit Kármán mérési eredményeire következőben Sheorey (1997) alapján külön-külön megadjuk ezeket az empirikus törési határgörbékét, és azok anyagállandóit az 1. táblázatban ismertetett adatokkal.

- Murrell (1965) egyenlete

$$\sigma_1 = \sigma_c + a\sigma_3^b \quad (1)$$

	a	b
Márvány	$8,0 \pm 0,8$	$0,79 \pm 0,02$
Homokkő	$28,6 \pm 1,8$	$0,53 \pm 0,01$

- Hobbs (1964) egyenlete

$$\sigma_1 = \sigma_c + \sigma_3 + a\sigma_3^b \quad (2)$$

	a	b
Márvány	$7,9 \pm 1,0$	$0,71 \pm 0,03$
Homokkő	$41,5 \pm 7,1$	$0,7 \pm 0,04$

- Franklin (1971) egyenlete

$$\sigma_1 = \sigma_c + a(\sigma_1 + \sigma_3)^b \quad (3)$$

	a	b
Márvány	$5,34 \pm 0,33$	$0,66 \pm 0,01$
Homokkő	$6,5 \pm 3,3$	$0,61 \pm 0,08$

- Hoek-Brown (1980) egyenlete ép kőzetekre:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + (m\sigma_c\sigma_3 + \sigma_c^2)^{1/2} \quad (4)$$

	m
Márvány	$7,28 \pm 0,14$
Homokkő	$11,9 \pm 2,0$

- Yoshida et al. (1990) egyenlete

$$\sigma_1 = \sigma_3 + a\sigma_c \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^b \quad (5)$$

	a	b
Márvány	$14,3 \pm 2,6$	$0,43 \pm 0,04$
Homokkő	$0,46 \pm 0,18$	$0,27 \pm 0,02$

Ezen egyenletnél $s = a^{-1/b}$, mivel $\sigma_1(\sigma_3 = 0) = \sigma_c$.

- Bieniawski (1974) egyenlete

$$\sigma_1 = \sigma_c + a\sigma_c \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^b \quad (6)$$

	a	b
Márvány	$2,85 \pm 0,05$	$0,79 \pm 0,02$
Homokkő	$3,92 \pm 0,04$	$0,53 \pm 0,01$

3 KONKLÚZIÓ

A legtöbb kétparaméteres kritériummal jól lehet Kármán adatait közelíteni. Az egyetlen egyparaméteres kritérium a Hoek-Brown, melynek eredményei jól korrelálnak, különösképpen a homokkőre. Megjegyezzük, hogy az ép kőzetre kapott Hoek-Brown állandók (m) megegyeznek a szakirodalmi adatokkal. A közelített paraméterek a homokkőre igen nagy hibát mutatnak Hobbs, Franklin valamint Yoshida törési határfeltételeinél (minden esetben a paraméterek esetén). Ez részben annak lehet köszönhető, hogy a különböző empirikus formulák eltérő mértékig érzékenyek a paraméterek pontosságára (bővebben lásd Ván & Vásárhelyi, 2006).

A rideg-képlékeny átmeneti határ jól megfigyelhető a vizsgált kőzeteken. Értéke a szakirodalom alapján jelentős mértékben változhat. Példaként az alábbi táblázatot mutatjuk be:

2. táblázat: Rideg-képlékeny átmeneti feszültség különböző közettípusoknál (Goodmann, 1989)

Közzettípus	Környezeti nyomás (MPa)
Kősó	0
Kréta	< 10
Mészkö	20-100
Homokkő	> 100
Gránit	» 100

A rideg-képlékeny átmenet köveknél nem csak nyomás hatására jöhet létre – Vásárhelyi (2001) ki-mutatta, hogy három pontos hajlító-húzó vizsgálat esetén is létrejön adott környezeti nyomás hatására.

Ahogy fentebb említettük, Kármán további – húzó jellegű – vizsgálatokat is tervezett Mohr hipotézisének ellenőrzéséhez. Nem tudjuk vajon ezen cikk megírása után folytatta-e méréseit – életrajzi leírása alapján egész más tudományterületekkel kezdett el foglalkozni. Triaxiális berendezésével ezek sem adhattak volna közvetlen információt a középső főfeszültség hatásának eldöntéséhez. Manapság már számos kísérlet alapján biztosan tudjuk, hogy a középső főfeszültségnek a rideg anyagok tönkremenetelében is szerepe van (lásd például Shimada, 2000). Viszont tudomásunk szerint még ma sincs olyan egyszerű, nem tisztán empirikus (azaz pusztán görbeillesztéses) kritérium, amely megkülönböztetné a tönkrementeli módokat és mindhárom főfeszültség hatását figyelembe tudná venni rideg anyagokra. Tehát elméletileg továbbra is nyitott a Kármán Tódor által megfogalmazott kérdés: „Mitől függ az anyag igénybevétele.

KÖSZÖNETNYÍLVÁNÍTÁS

A konferenciára a cikk megírását az OTKA K81161 sz. pályázata támogatta, melynek ezúton mon-dunk köszönetet.

IRODALMI HIVATKOZÁS

- Bieniawski Z.T. 1974: Estimating the strength of rock materials. *J. S. Afr. Inst. Min. Metall.* **74**: 312-320.
- Franklin J.A. 1971: Triaxial strength of rock material. *Rock Mech.* **3**: 86-98.
- Goodman R.E. 1989. *Introduction to Rock Mechanics*, 2nd edn. John Wiley, Chichester, 562 p.
- Hobbs D.W. 1964: The strength and the stress-strain characteristic of coal in triaxial compression. *J. Geol.* **72**(2): 214-231.
- Hoek E., Brown E.T. 1980: *Underground excavations in rock*. London, Inst. Min. Metall.
- Kármán T. 1910. Mitől függ az anyag igénybevétele? *Magyar Mérnök és Építészegylet Közlönye*, **10**: 212-226.
- Kármán von Th. 1911. Festigkeits Versuche unter allseitigem Druck. *Verhandl. Deut. Ingr.* **55**: 1749-1758.
- Kármán von Th., Edison L. 1967. *The wind and beyond – Theodore von Kármán: the Pioneer in aviation and pathfinder in space*. Little, Brown and Comp. Inc.
- Kick F. 1892. Die Principien der mechanischen Technologie und die Festigkeitslehr, Zweite Abhandlung, *Z. Ver. Dtsch. Ing.* **36**: 919-933.
- Mogi K. 1966. Pressure dependence of rock strength and transition from brittle fracture to ductile flow. *Bull. Earthquake Res. Inst. (Tokyo Univ.)* **44**: 215-232.
- Murrell S.A.K. 1965: *A criterion for brittle fracture of rocks and concrete under triaxial stress and the effect of pore pressure on the criteria*. 5. US Rock Mech. Symp. 563-577.
- Sheorey P.R. 1997: *Empirica Rock Failure Criteria*, A.A. Balkema, 1997.
- Shimada M. 2000: *Mechanical behavior of rocks under high pressure conditions*, Balkema.
- Ván P., Vásárhelyi B. 2001. *Second Law of thermodynamics and the failure of rock materials*, In: D. Elsworth, J.P. Tinucci, & K.A. Heasley (eds) Proc. 9th North American Rock Mech. Symp., Washington, Balkema, 767-773.
- Ván P., Vásárhelyi B. 2007. *Sensitivity analysis of the Hoek-Diederichs rock mass deformation modulus estimating formula*, In: L.R. Soussa, C. Ollala, & N.F. Grossmann (eds) Proc. 11th ISRM Cong. Lisbon, Balkema, 411-414.
- Vásárhelyi B. 2001. *Investigation of crack propagation with different hydrostatic pressure on anisotropic gneiss*. In: P. Säkkä & P. Eloranta (eds.) Eurock'2001, Espoo, Balkema, 187–190.
- Yoshida N. Morgenstein N.R. Chan D.H. 1990: Failure criteria for stiff sils and rocks exhibiting softening. *Can. Geotechn. J.* **27**(2): 195-202.