Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 (Szerk: Török Á.. & Vásárhelyi B.) oldal: 125-148

Az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdései

Lámer Géza
DE MK Építészmérnöki Tanszék, lamer@lamer_es_lamer_kft.hu; glamer@mfk.unideb.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: A tanulmányban az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének a kérdéseit tekintjük át. Ezen belül foglalkozunk az anyagi viselkedés különböző formáival, mint például a szemcsehalmazok átrendeződése, a szilárd testek rugalmas alakváltozása, képlékeny és viszkózus folyása. Megmutatjuk egyrészt, hogy a diszkrét szemcsehalmazban nem alakváltozás, hanem átrendeződés megy végbe, másrészt, hogy mivel a szilárd testekben végbemenő alakváltozás értelmezéséhez a leképezés folytonosságát, a metrikus tenzor létét tételezzük fel, ezért a különböző folyás típusú alakváltozások, a nagy rugalmas alakváltozások és az átrendeződéssel végbemenő alakváltozások a folytonos alakváltozás fogalmával nincsenek összhangban. A szemcsehalmazok esetében megmutatjuk, hogy a két- (síkbeli feladatok), illetve hárompontos (térbeli feladatok) feltámaszkodás hipotézise lehetőséget ad a szemcsehalmaz egyensúlyi állapotának a meghatározására, ezen belül az átrendeződés nyomon követésére.

Kulcsszavak: átrendeződés, folytonos alakváltozás, anyagegyenletek, érintkezési erők, feszültségek

1 BEVEZETÉS

Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai és a dinamikai kérdései [Lámer 2006a, 2007b] után figyelmünket az anyagmodellekre fordítjuk: jelen tanulmányban az anyagtulajdonságokat és matematikai modelljeiket.

A testek mechanikai kölcsönhatás vagy külső erőhatás alatt megváltoztatják az alakjukat. Az alaknak ez a megváltozása függ a kölcsönhatás, illetve az erőhatás jellegétől, a test alakjától, azoktól a feltételektől, ahogyan a kölcsönhatás, illetve erőhatás éri a testet, és függ a testet alkotó anyag tulajdonságaitól. Rögzített jelleg, alak és feltételek mellett a különböző testek alakja megváltozásának csak az anyagtól való függését tekinthetjük az anyag tulajdonságának. Az anyagi tulajdonságokat többnyire anyagi állandók formájában rögzítjük. Ahogyan a kölcsönhatást, illetve az erőhatást, valamint az alak megváltozását matematikai fogalmakkal modellezzük, úgy az anyagi tulajdonságokat is matematikai fogalmakkal kívánjuk leírni. E leírás egyenletekkel történik. Az egyenleteket tekintjük az anyagegyenleteknek, vagy az anyagtörvényeknek.

A tanulmány célkitűzése az anyagi tulajdonságok áttekintése. Az áttekintéshez a mérnöki gyakorlathoz közelebb álló módot választunk: körülírjuk az anyagi viselkedést. Amennyire lehet, megadjuk az atomi-molekuláris szinten végbemenő történéseket-változásokat, ha nem is a kvantummechanika nyelvén, de legalább kvantitatívan. A tanulmányban nem képleteket kívánunk megadni, az összefüggéseket inkább körülírjuk vagy egy-egy grafikonon mutatjuk azt be. Néhány összefüggést felírunk, de azokat is ábra megnevezéssel tesszük közzé.

A tanulmányban rendszeresen fogjuk használni a matematikai modell kifejezést. Ez alatt elsősorban matematikai struktúrát vagy matematikai tulajdonságot fogunk érteni, mint például a topológia vagy a metrika, illetve a folytonosság és a diszkrétség. Konkrét matematikai modell nem adunk meg, legfeljebb körülírjuk.

Végül rá kell mutatnia arra, hogy az anyagtörvények tárgyalását már vagy jó ötven évvel ezelőtt is több elv figyelembevételéhez kötötték: az anyagi objektivitás elve, a determinizmus elve a feszültségre, a lokális hatás elve, valamint, hogy az anyagtörvények nem lehetnek ellentmondásban a termodinamika elveivel. Mára a termodinamika nem egyszerűen mint „korlát” szerepel az anyagegyenletek alkalmazásában, hanem termodinamikán belül az entrópiaprodukció elve egyenesen az az eszköz, amelynek a segítségével meghatározhatók az anyagegyenletek, és a második főtétel az a feltétel, amely meghatározza az anyagi állandók közötti kapcsolatokat és az anyagi állandók számszerű értékeinek a korlátjait.

A jelen tanulmányban ezeket az elveket ismertnek tételezzük fel (lásd pl. [Tuesdell és Noll, 1965], [Verhás, 1985], továbbá az anyagtörvényeket mindennapi mérnöki gyakorlat szerint mint az alakváltozás és a feszültség közötti kapcsolatot tekintjük, és értelmezéséhez fizikai jelenségeket és fizikai kísérleteket tekintünk. Az anyagtörvényekre vonatkozó korlátozásoknak termodinamikai megfontolásokra alapozott vizsgálata kívül esik a tanulmány keretein.

2 AZ ANYAGOK FIZIKAI VISELKEDÉSE

2.1 *A négy test és általános jellemzésük*

Az anyagok állapotának jellemzésére a hőmérséklet változása szerint három halmazállapotot – légnemű, folyadék és szilárd – szokás megkülönböztetni. Ezeket egyúttal szokás testeknek is nevezni. Az anyagok állapotának jellemzésére mechanikai kölcsönhatással vagy külső erőhatással szembeni viselkedés szerint – mint arra korábban rámutattunk [Lámer 2005a, 2006a], – négy testet kell megkülönböztetni: a fentebb említetteken kívül a szemcsehalmazt vagy szemcsés testet is. A szemcsés testet a folyadék és a szilárd test „közöttinek” tekintjük. Az egyes anyagi testek viselkedésének a jellemzését is megadtuk korábban, lásd ugyanott. Itt csak röviden áttekintjük az egyes anyagi testek néhány jellegzetes mechanikai viselkedését.

A gáz kitölti a rendelkezésre álló teret. A folyadék a gravitáció iránya szerint a legmélyebb ponton gyűlik össze, csak edényben tartható és felveszi annak az alakját. A szemcsehalmaz gravitációs térben, egy sík felületen, kúp alakot vesz fel. A szilárd test tetszőleges alakot vehet fel és azt a gravitáció hatása alatt is megtartja.

A gázra koncentrált erővel hatni nem lehet, a folyadékra sem, a szemcsehalmaz átrendeződik, a szilárd test merev testként mozdul el.

A gázba, a folyadékba nem lehet lyukat fúrni, ellenben mindkettő „széttolható” és lehet bennük közlekedni. A szemcsehalmazba sem lehet lyukat fúrni, és hiába toljuk szét vagy távolítjuk el az anyagot, a szemcsés közegben alagút nem készíthető. Szilárd testben alagút fúrható, a lyuk az anyag eltávolítása árán készíthető el, a lyuk stabil „alakzat”.

A gázban rázás – mármint a gázt tartalmazó edényt rázhatjuk – hatására nem történik semmi említésre érdemes, a folyadékban és a szemcsehalmazban átrendeződése jön létre, szemcsehalmazban egyedi jelenség – pl. befeszülés – alakulhat ki. A szilárd test rázás hatására merev testként viselkedik.

A gázt, a folyadékot és a szemcsehalmazt hajtogatni nem lehet, ezek a feladatok egyszerűen nem értelmezhetőek. A szilárd halmazállapotú fémek túlnyomó többsége hajtogatható. A szilárd halmazállapotú anyagok döntő többsége nem hajtogatható, hajtogatás hatására törnek.

A gáznemű testet nem lehet önteni, a folyékony és a szemcsés test önthető. A szilárd test merev testként csúszik vagy gurul. A fenti kategorikus megállapítások nem pontosan fedik a valóságot: a különösen nagy sűrűségű gázok (lassan) önthetők, a különösen nagy belső súrlódással rendelkező folyadékok nyugalomban szilárd testként, az edényt megdöntve folyadékként viselkednek, a rugalmas folyadéknak nevezett gélek, vagy hosszúszálú szénmolekulákból álló testek önthetők, de a folyadékokkal ellentétben a kiömlő sugár elvágható, és a vágás feletti rész a rugalmas testekre jellemzően visszaugrik az edénybe. Megemlítjük még, hogy a folyadékok igen nagy sebességű behatással szemben szilárd testként viselkednek (pl. kacsázás kaviccsal a víz felszínén, lövedék becsapódása folyadékkal telt edénybe). Végzetül emlékeztetünk arra, hogy szilárd testek nagy nyomás alatt folynak.

2.2 *Az alak megváltozása: fizikai háttér és matematikai modell*

A testek mechanikai kölcsönhatás vagy külső erőhatás alatt megváltoztatják az alakjukat. Ennek az egyszerű megállapításnak két oldala van. Az egyik, hogy az alak megváltozásának a tényét látni, sőt mérni kell. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az alak megváltozásának rögzítéséhez a vizsgált testünket, még inkább azt a teret, amelyben a vizsgálat zajlik, mérésre alkalmas matematikai modellel, metrikával kell ellátni. A másik oldala pedig az, hogy az alak megváltozása az anyag belső szerkezete megváltozásával van kapcsolatban. Ez a megváltozás korlátozódhat az egymás szomszédságában lévő atomok és/vagy molekulák közötti távolság megváltozására, de magába foglalhatja azt is, hogy az egymás szomszédságában lévő atomok és/vagy molekulák elkerülnek egymás szomszédságából, és viszont, a korábban nem szomszédos atomok és/vagy molekulák szomszédossá válhatnak. Ennek kapcsán fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a gázok és a folyadékok esetében a szomszédossági viszony folyamatosan változik, mindemellett a gázt vagy a folyadékot tartalmazó edény alakja, és így a gáznemű, vagy folyékony test alakja is változatlan. A kétféle változás közötti különbséget a topológia nyelvén fogalmazhatjuk meg [Lámer 2003a, 2006a]: a topológiai rend változatlan vagy a topológiai rend megváltozik.

Egy test alakjának az egymás szomszédságában lévő atomok és/vagy molekulák közötti távolság megváltozásával létrejövő megváltozását alakváltozásnak fogjuk nevezni. Ennek során az anyag belső szerkezetében a topológiai rend változatlan. Hangsúlyozni kívánjuk, hogy ebben az esetben jelző nélkül alkalmazzuk az „alakváltozás” terminológiát, illetve célszerűnek tűnik a folytonos jelző használata: „folytonos alakváltozás”.

Egy testen belül az egymás szomszédságában lévő atomok és/vagy molekulák, illetve szemcsék szomszédossági viszonyainak a megváltozását átrendeződésnek fogjuk nevezni. Ennek során az anyag belső szerkezetében a topológiai rend megváltozik.

Az átrendeződés alapvetően kétféle lehet. Az átrendeződés helyreállhat a külső hatás megszűntével, illetve a külső hatás megszűntét követően az eredeti rend nem áll helyre.

Az elsőre példa a hosszúláncú szénmolekulák másodlagos kötéseinek át-, illetve visszarendeződése. Ez történik a rugalmas gumiból készült testek alakjának nagymértékű megváltozása során. Az alakváltozás kifejezést ebben az esetben jelzővel egészítjük ki, és speciálisan „nagy rugalmas alakváltozásokról” fogunk beszélni.

A másodikra példa a fémek képlékeny megmunkálása, a tészta dagasztása, az agyag gyúrása. Mindhárom esetben „folyás típusú alakváltozás” kifejezést fogjuk alkalmazni. Az alak megváltozásának a megindulásához a belső erőknek egy határt kell elérni. Ennek okán szokás képlékeny folyásról beszélni.

A szemcsehalmaz alakjának a megváltozása átrendeződéssel jön létre. Használni fogjuk az „átrendeződéssel létrejött alakváltozás” kifejezést is. A szemcsehalmaznak létezik olyan átrendeződése, hogy több, egymástól független kisebb részre, netán nem érintkező szemcsék halmazára esik szét.

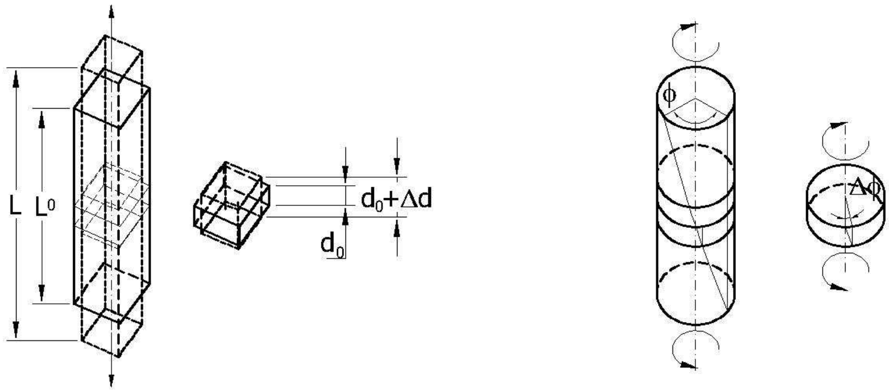
A fentebb bevezetett terminológiával a nyugalomban lévő – pontosabban a makroszkopikus értelemben annak tekintett – gázokban és a folyadékokban az atomok és/vagy molekulák folyamatosan átrendeződnek. Mint említettük, ez nem jár a test alakjának a megváltozásával. Ez esetben alakváltozásról sem beszélünk.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy az alakváltozás és az átrendeződés közötti választó vonal a topológiai rend állapota: amennyiben a rend megmarad, úgy alakváltozásról, amennyiben nem marad meg, úgy átrendeződésről beszélünk. Ezt a megállapítást akkor is szem előtt kell tartani, amikor – figyelemmel a nyelv hétköznapi használatára, valamint a meggyökeresedett terminológiára – „nagy rugalmas *alakváltozás*”, „folyás típusú *alakváltozás*”, „átrendeződéssel létrejött *alakváltozás*” kifejezést használjuk. Igaz, hogy a test alakjának megváltozásáról van szó, de nem alakváltozás, hanem átrendeződés megy végbe a testen belül. Az alakváltozás különböző jellegének hangsúlyozása hivatott emlékeztetni arra, hogy mind fizikai, mind matematikai szempontból az alak megváltozása két, egymástól gyökeresen különböző módon megy végbe. És ennek megfelelően két, egymástól gyökeresen különböző fizikai és matematikai modellre van – vagy legalábbis lenne – szükség.

2.3 *A folytonos alakváltozás értelmezése és mérése*

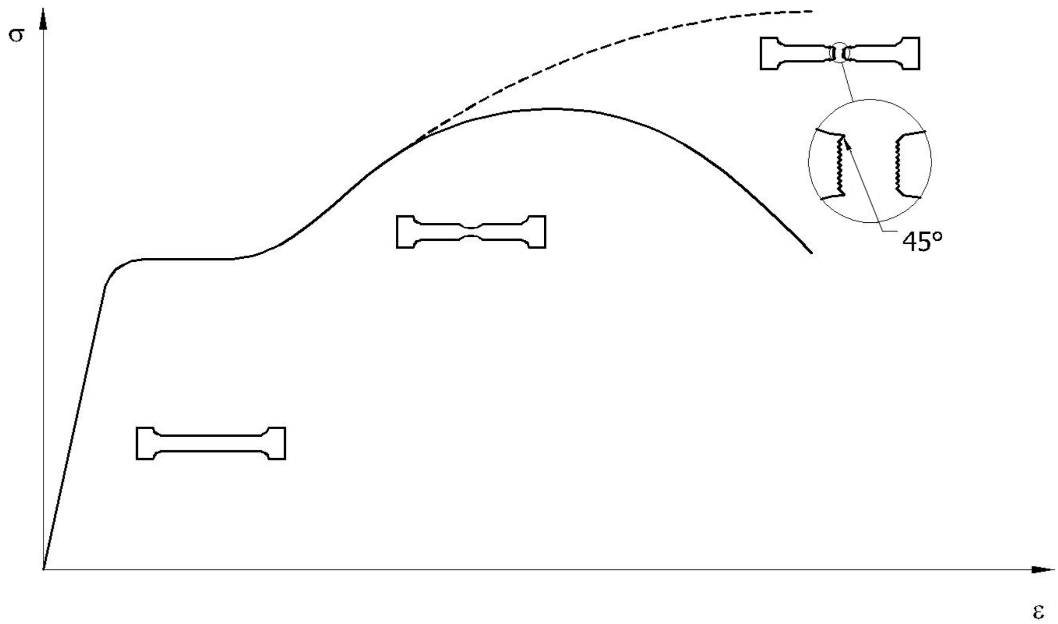
A folytonos alakváltozást a beágyazó térben annak folytonos leképezéseként értelmezzük. Az alakváltozás értelmezéséhez a teret metrikával látjuk el. Az alakváltozást egyrészt a testen belüli görbék hosszának megváltozásával, másrészt az egymást metsző görbék (érintővektorok) egymással bezárt szögének a megváltozásával értelmezzük. Ez az értelmezés egyúttal arra is lehetőséget ad, hogy az alakváltozást megmérjük.

Az alakváltozás „tipizált” mérésére egy négyzet keresztmetszetű, egyenes, prizmatikus test húzása és egy egyenes körhenger alakú test csavarása ad lehetőséget: a prizmatikus test hossza, illetve a körhenger alakú test két véglapjának egymáshoz viszonyított elfordulása adja a mérés lehetőségét. Az első esetben a lehetőséget az adja, hogy a prizmatikus test húzása esetén szögváltozás nem lép fel. Pontosabban a húzás irányára merőleges keresztmetszetek, kellően karcsú rúd esetén, a nyújtás után is a rúdtengelyre merőlegesnek tekinthetők. A második esetben a lehetőséget az adja, hogy a körhenger alakú test csavarása esetén nyúlás nem lép fel. Pontosabban a henger alkotói, mint megcsavarodó szálak, kellően karcsú rúd esetén, csak jelentéktelen, elhanyagolható mértékű nyúlást szenvednek el (1. ábra). (Karcsú rúd alatt azt értjük, hogy a rúd keresztmetszetének befoglaló méretei nagyságrendben kisebbek, mint a rúd hossza.)



1. ábra. Az alakváltozás értelmezéséhez és méréséhez

Végül utalni kell arra, hogy a mérésre a lehetőséget a folytonosság adja: ha nyújtjuk vagy csavarjuk a testet, akkor folytonosan, minden keresztmetszetében nyújtjuk és minden keresztmetszetében csavarjuk. Tehát elegendő a két végpont eltávolodását (közeledését), illetve elcsavarodását mérni, hiszen a folytonosság okán a két végpont között is hasonló, sőt azonos folyamatok – nyúlás és csavarás – mennek végbe. Ennek okán utalni kell arra is, hogy a nem folytonos alakváltozás esetén nem lehetünk biztosak abban, hogy mi is történt a két végponton belül. Elegendő, ha a henger alakú acél próbatest nyújtására gondolunk: az ideálisan képlékenynek tekintett állapotot követő felkeményedő, ugyancsak folyási alakváltozással jellemezhető állapotban a próbatest annak egy keresztmetszetében elveszíti az anyagi stabilitását, és egy „nyak” alakul ki. Így csak a rúd egészére vett hosszváltozás nem jellemzi a rúd egészének az alakváltozását (2. ábra). Hasonlóképpen áll a helyzet a csavarással is: a próbatest egy keresztmetszetében elveszíti az anyagi stabilitását és egy kicsiny hosszában lényegesen nagyobb mértékű az elcsavarodás (akár többször is körbefordulhat), mint a próbatest többi részén.



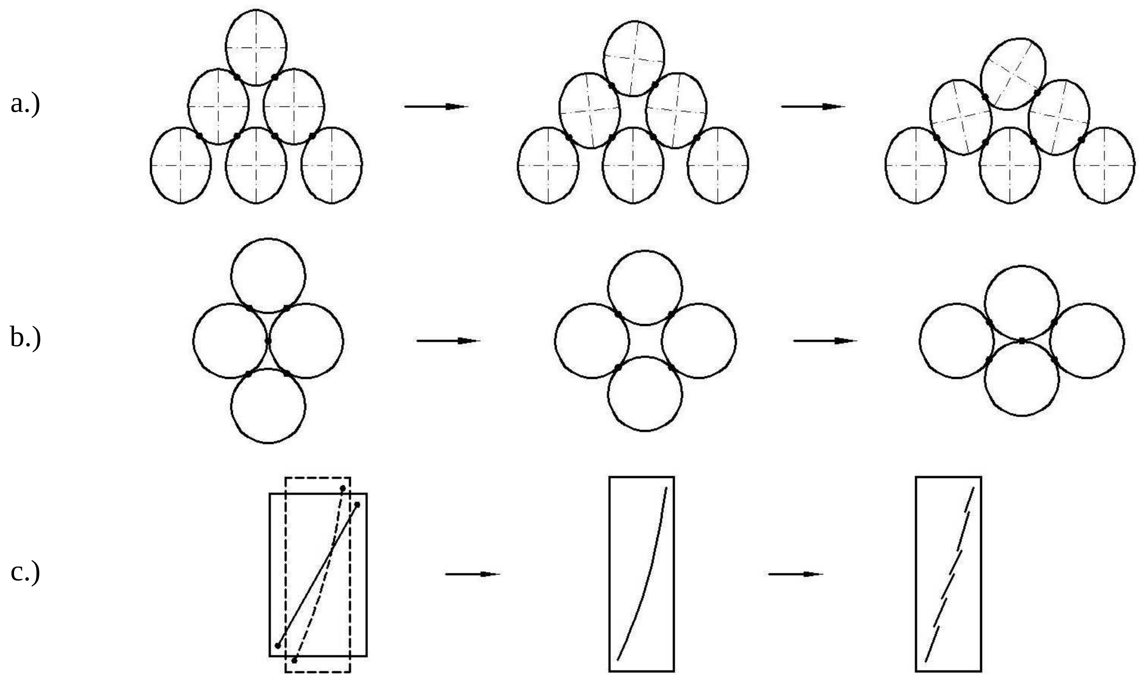
2. ábra. A képlékeny alakváltozás fogalmához

Megjegyzés. A „nagy rugalmas alakváltozást”, „folyás típusú alakváltozást”, „átrendeződéssel létrejött alakváltozást” is hallgatólagosan folytonos alakváltozásnak tekintik, és az alakváltozás mérésére ugyancsak a hosszváltozást és a szögváltozást alkalmazzák. Véleményünk szerint ez nem fedi matematikailag a valóságot.

2.4 *Az átrendeződés értelmezése és mérése*

Az átrendeződést a beágyazó térben, annak diszkrét leképezéseként értelmezzük. Az átrendeződés értelmezéséhez rögzítjük a szemcsék szomszédossági viszonyait: melyik szemcse érintkezik melyik szemcsével (3. ábra). Az átrendeződést a szomszédsági viszonyok megváltozásával értelmezzük. Ez az értelmezés csak elvileg ad lehetőséget arra, hogy az átrendeződést „megmérjük”. Ugyanis egy halmazon belüli rendet nem áll módunkban megmérni, hiszen a szemcsehalmaz külső szemcséi elfedik a belső szemcsék helyzetét.

Az átrendeződés „tipizált” mérésére a különböző jellemző típus „peremérték-feladatok” szolgálhatnak. Ilyen a tömörödés vizsgálata vibráció, vagy nyomás hatására, a merev pecsét benyomása féltérbe, a halmok növekedésének a vizsgálata felülről történő szemcseszórással. Az egyes feladatoknál homogén jellegű állapot létrehozására törekszünk, hogy jó közelítéssel lehessen kijelenteni, hogy az átrendeződés a halmaz minden részében azonos módon ment végbe. Ekkor az átrendeződést nem minden egyes szemcse tényleges szomszédossági viszonyainak a megadásával, hanem az átrendeződés globális jellemzőivel adjuk meg. Ezek a halmaz tömörsége, a test alakja és az oldalnyomás értéke.



3. ábra. Az átrendeződés fogalmához
a) az egyes érintkezési pontok helye, a szemcsék iránya változik b) a szomszédsági viszonyok változnak, c) ami alakváltozásnak látszik, az lehet folytonos vagy szakadásos alakváltozás

A halmaz tömörségét elvben mintavétellel kellene mérni. Valójában a halmaz alakjának megváltozásából következtetünk a tömörségre: a halmazt abszolút merevnek tekintett edényben vibráljuk vagy tömörítjük, és elegendő a felső sík mozgását – elmozdulását – mérni. Rá kell mutatni arra, hogy a halmaz nem rövidül, amikor tömörödik, netán nem nyúlik meg, ha lazul, hiszen a szemcsék nem nyomódnak összébb, kiváltképpen a lazulás esetén a szemcse nyúlása irreális, hiszen nincs rá mód, hogy egy szemcsét a két végén két-két (térben három-három) másik szemcse közrefogja és megnyújtsa. Megemlítjük, hogy amíg laza szemcsehalmazok tömörödése a térfogatra vetítve 10-20 %-os szokott lenni, addig a szilárd anyagok folytonos, de még a folyás típusú alakváltozása sem jár 0,1-0,2 %-nál nagyobb térfogatváltozással. Megjegyezzük, hogy szemcsés testek nyomással történő tömörítésnek van egy hatékony mélysége, amely alatt a tömörödés valójában nem megy végbe. Vibrált edény esetén ilyen határmélység nem létezik. Ugyanakkor a vibrálás lazíthat is, sőt, rezgésbe jöhet a szemcsehalmaz minden eleme, és a felületén a rezgő lemezek Chladni-féle alakzataihoz hasonló mintázatokat kapunk.

A vízszintes felületű szemcsehalmaz felületébe, annak területéhez képest kis területű merev pecsét benyomása során a pecsét mellett a szemcsés anyag felpúposodik. Ennek legszebb példája nedves partfövenyen a talpunk mellett felpúposodó homok. A süllyedés mértékéből, a felpúposodott anyag alakjából, a magassági és szélességi méreteiből következtethetünk az átrendeződés mértékére.

A szemcsehalmazon belüli elrendeződés jellegéről ad – szó szerint – képet a gravitáció hatása alatt formálódó halmaz: a kúp alakja, nyílásszöge, a növekedés lépései, az omlások és folyások („lavina”) jellege.

A szilárd edényben egytengelyű nyomásnak kitett szemcsés anyag a szemcsés szerkezetének következtében oldalnyomást fejt ki. A nyomás növekedtével átrendeződik a halmaz és ezzel együtt változik az oldalnyomás. Befeszülés után az oldalnyomás már a nyomás növekedtével – mint a folytonos közegben – lineárisan változik.

3 GEOMETRIAI (KINEMATIKAI) KÉRDÉSEK: ÁTRENDEZŐDÉS ÉS ALAKVÁLTOZÁS

Geometria kérdések alatt a testek helyének, helyzetének és alakjának a megváltozását fogjuk érteni függetlenül attól, hogy a változásokat az időtől függetlennek (más szóval: statikusnak) vagy az időtől függőnek (más szóval: dinamikusnak) tekintjük.

A geometriai kérdések tárgyalásánál szem előtt kell tartani, hogy a kontinuum ponthalmaz, a szemcsehalmaz véges méretű, egyszer s mindenkorra rögzített alakú, zárt ponthalmazok – ha úgy tetszik, véges tartományok – halmaza.

3.1 *Az átrendeződés*

3.1.1 *A fizikai jelenség*

Az átrendeződést fizikailag a szemcsék áthalmozásával mutathatjuk be: egy halom szemcsés anyagot, mint például a homokot vagy kavicsot átlapátolunk egy halomból egy másikba. De átrendezésnek tekinthetünk egy halom tégla átrakását egy másik halomba. A szemcsés talajok – kavics, homok, homokliszt – tömörítése is átrendeződéssel jár. Végül példaként említjük meg a cölöpök leverését vagy levibrálását talajba: a talaj a lefelé mozgó cölöpcsúcs környezetében tömörödik, átrendeződik, hogy helyet adjon a cölöp testének.

Az átrendeződéshez soroljuk a tészta gyúrását, a fazekas agyagjának a gyúrását és korongolását. A kinyújtott és egymásra hajtogatott, majd egymásba nyomott és újból kinyújtott alakítás is példa az átrendeződéssel végbemenő alakváltozásra. Megjegyezzük, hogy a gyúrásra-nyújtásra alkalmas állapot előállhat vízfelvétellel (pl. tészta, agyag, hidraulikus habarcsok), a hőmérséklet növekedésével (pl. fémek, hőre lágyuló műanyagok, üveg, bitumen) és előállhat nagy nyomás alatt (pl. fémek, jég, kőzetek).

A fentiek alapján az átrendeződéshez soroljuk a kovácsolással történő alakítást is.

A folyást (is) átrendeződésnek tekintjük. A folyás során egyes atomi-molekuláris, vagy szemcsékből álló rétegek elmozdulnak egymás mellett. Egy mederben áramló folyó egy-egy keresztmetszetében az áramlási sebességet egy parabola írja le, a széleken a súrlódás miatt a sebesség kisebb, mint középen. Ha deformálódna a folyadék, akkor egy-egy vízsáv úgy elnyúlna, hogy azt a vízmolekulák nem lennének képesek követni. További példaként említhetnénk meg a hullámokat, a tajtékot, a vízesését. Itt éppenséggel azt a tulajdonságát kell kiemelni a diszkrét – szemcsés – közegeknek, hogy az alak megváltozása során akár részeire hullhat szét a közeg, és ha a részek ismét találkoznak, akkor a szétválás előtti szerkezet helyreáll. Három ilyen szerkezetű közeget különböztethetünk meg: a gáznemű, a folyékony és a szemcsés anyagú közeget. Egyúttal jelezzük, hogy a kötött talajban – a tapasztalat alapján – a szétválás előtti szerkezet – a „kötés”, a kohézió – idővel helyreáll, a változás – külső körülmények változását értve alatta – és a talaj minősége függvényében néhány hónaptól több évig, vagy évtizedig tarthat az az idő, ami alatt ismételten felépül a kohézió (azaz a kötés).

Végezetül megjegyezzük, hogy a folyás jellege szerint különböztetünk meg „száraz” folyadékot – két egymás mellett áramló folyadéksugár között nincs kölcsönhatás –, „nedves” folyadékot – két egymás mellett áramló folyadéksugár között kismértékű kölcsönhatás lép fel –, és viszkózus folyadékot – két egymás mellett áramló folyadéksugár között jelentős nagyságú kölcsönhatás lép fel –. A mérték meghatározása kívül esik a jelen tanulmány keretein, mindösszesen emlékeztetünk a lamináris és turbulens áramlásra, és ennek kapcsán a különböző határréteg elméletekre.

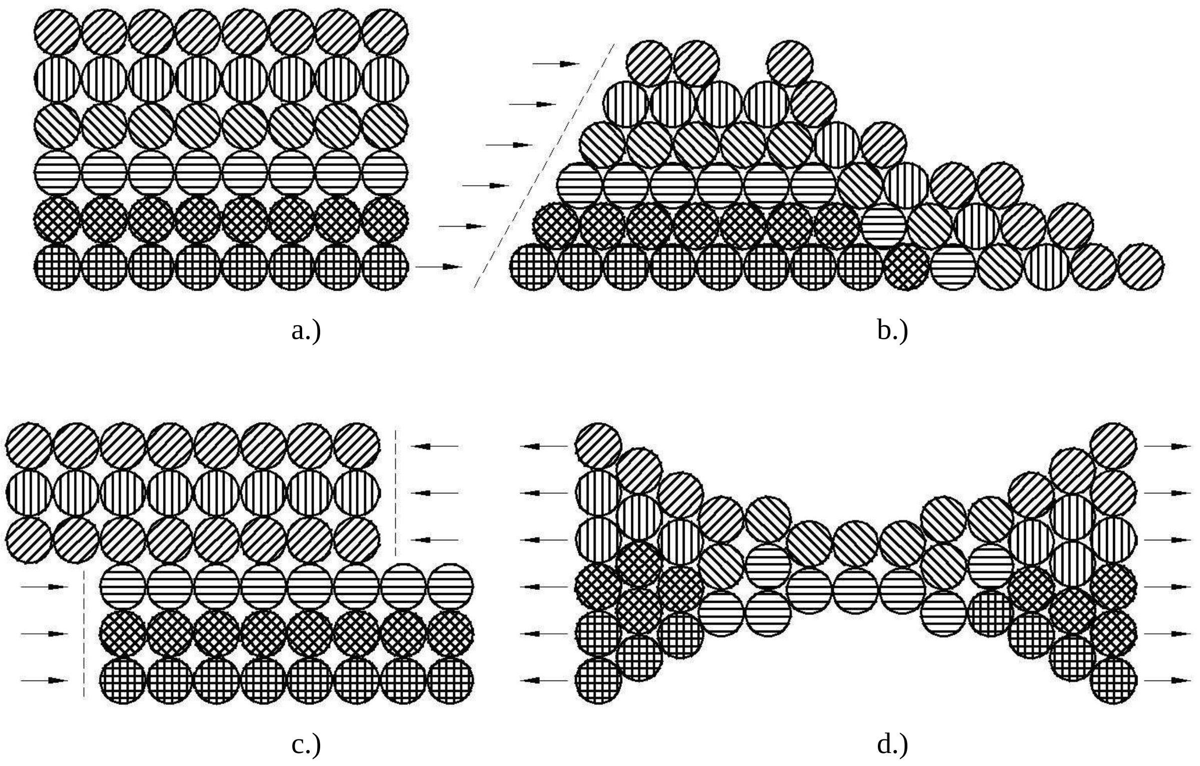
Száraz folyadéknak tekinthető a víz, nedves folyadéknak tekinthető a finomított olaj. Az igen sűrű, nagy viszkozitású folyadékra példa lehet a sűrű tészta, a ragadós bitumen massza, a fazekas pihentetett agyagja.

Megjegyezzük, hogy száraz folyadék természetesen nincs, attól folyadék a folyadék, hogy az egymás melletti elemi térfogatokban a hőmozgás hatására kicserélődnek az atomok és/vagy molekulák, az a feltevés, hogy két egymás mellett áramló folyadéksugár között nincs kölcsönhatás, csak egy idealizáció.

3.1.2 *Matematikai értelmezés*

Az átrendeződés fogalmához először rögzíteni kell egy rendet. A rend alatt a szemcsék szomszédossági viszonyát fogjuk érteni: két szemcse szomszédos, ha érintkeznek. A rend megváltozása – azaz az érintkezés felbomlása, új érintkezés létrejötte – adja meg az átrendeződést (lásd a 4. ábrát).

Matematikailag az átrendeződést – az egyszer s mindenkorra rögzített alakú, zárt ponthalmazok leképezése a beágyazó térben – az egyes szemcséknek a szomszédossági – érintkezési – viszonyaival adjuk meg. Ezt matematikai értelemben egy mátrix-szal reprezentálhatjuk: az érintkező szemcsék esetén a mátrix elemének az értéke 1, nem érintkező szemcsék esetén nulla. Az átlóban értelemszerűen csupa nulla áll: egy szemcse önmagával nem érintkezik. A mátrix ritka, hiszen egy szemcse – azonos, vagy legalábbis közel azonos nagyságot feltételezve – átlagosan 12 elemmel érintkezik (a térben).



4. ábra. Az átrendeződés, mint diszkrét leképezés
a) alapállapot, b) egyoldalas nyomás, c) nyírás, d) húzás

3.1.3 *A kettő kapcsolata*

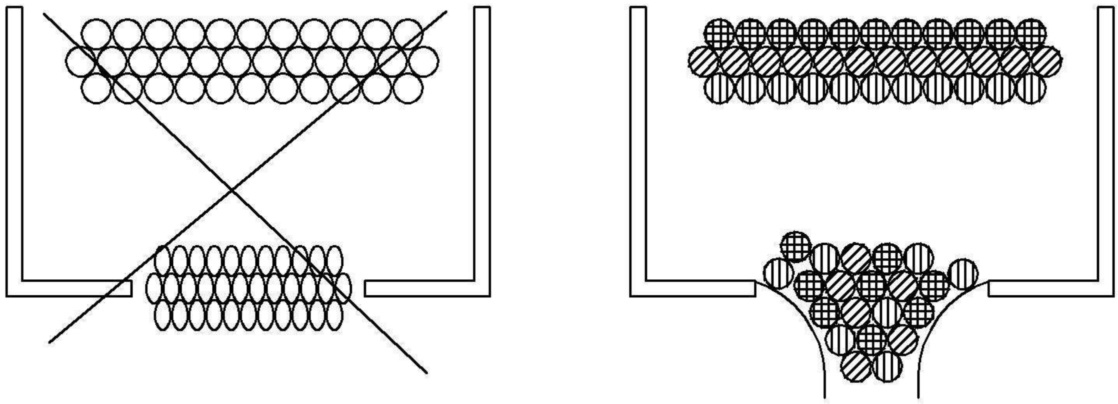
Formálisan képesek vagyunk az átrendeződést matematikailag leírni. A nehézségek ott kezdődnek, hogy ha egy elénk kerülő halomban – pl. egy kavicsbányában a halomba szórt kavics – kívánjuk a szomszédossági viszonyokat meghatározni. Ez gyakorlatilag lehetetlen. Mire meghatározzuk a szomszédossági viszonyokat, kitelt a tudományos életünk, és egyúttal megszüntettük a vizsgálandó halmazt. Igaz, rakhattunk egy új halmot, sőt annak felépítése során meghatározhatjuk a kapcsolódási pontokat, de ez utóbbi egy mesterséges halom és csak azt tudjuk, hogy melyik szemcsét melyikre raktuk, de azt már nem tudjuk, hogy a halom, annak növekedtével, a saját súlya alatt hogyan rendeződött át!

Megjegyezzük, hogy a néhány száz, vagy ezer elem esetén van értelme a szemcsék közötti kapcsolat nyilvántartásának. Homokbucka, tészta, képlékeny alakítás, és más hasonló anyagok, illetve azok alakjának megváltozása esetében ugyan az alak megváltozásának a leírására az átrendeződés fogalma mind fizikailag, mind matematikailag helytálló, de a tényleges viselkedés leírásra közvetlenül nem alkalmas matematikai modell.

A fizikai viselkedés matematikai modellezésére kisméretű – egynéhány, néhány száz vagy néhány (tíz)ezer elemet tartalmazó – halmaz esetén van valós esély és gyakorlati számítási algoritmus. Ez általában dinamikai modelleken alapul, és ezért kellően pontosnak tekintendő. Ugyanakkor ahhoz, hogy a dinamikai egyenlet ne rezgőmozgást adjon, csillapítást „építettek be” a mozgásegyenletekbe. Ezen a ponton olyan elemet tartalmaz a matematikai modell, amely ugyan biztosítja, hogy rezgés ne lépjen föl, és kvázi-statikus állapotokra bontsa föl a halmaz átrendeződését, de valójában olyan hipotézissel él – csillapítás – amely a szemcsehalmazban nem létezik. Emlékeztünk arra, hogy a szállítószalagról állandó sebességgel a halmaz tetejére hulló „kavicsfolyam” egyes szemcséi nem csillapodás útján fékeződnek le, hanem a „kavicsfolyam” a lendületével alakítja át a halmazt: annak oldalán újból és újból egy kis „lavinát” indít, el a szemcsék átrendeződnek, és beállnak egy-egy új egyensúlyi helyzetbe.

Meg kell jegyezni, hogy a három nem folytonos alakváltozás, tehát a „nagy rugalmas alakváltozás”, a „folyás típusú alakváltozás” és az „átrendeződéssel létrejött alakváltozás” esetén hasonló a helyzet: sem a kezdeti állapotban, sem a végállapotban a tényleges szomszédsági viszonyok nem határozhatók meg, mindösszesen a test alakjának globális, vagy, másképpen fogalmazva, makroszkopikus megváltozása észlelhető.

Meg kell jegyezni azt is, hogy a gázokban és a folyadékokban folyamatos átrendeződés megy végbe: a hőmozgás hatására a gázt és folyadékot alkotó atomok és/vagy molekulák egymással és az edény falával ütköznek. Az elemi térfogat megváltozása nehezen értelmezhető alakváltozásnak. Példaként azt az áramlást tekintjük, midőn egy edény alján lévő lyukon kifolyik a folyadék. Ennek során nem összenyomódik a folyadék olyan kicsiny keresztmetszetűre, mint az edény alján lévő lyuk, hanem az atomok és/vagy molekulák átrendeződnek, szép sorjában, egyik a másik után bejut a kiömlőnyílásba. E közben – értelemszerűen – a sorrendjük megváltozik (lásd az 5. ábrát).



5. ábra. A folyás, mint átrendeződés

A fentiek alapján a folytonos alakváltozás fogalmának az alkalmazása a folyadékok mozgásának, a folyás típusú alakváltozásnak a leírására matematikailag nem megalapozott. A nagyszámú szemcse miatt sem a kezdeti állapot meghatározása, sem az átrendeződése, egyedi nyomon követése nem megoldható matematikai feladat. Megoldható feladatnak a halmazok látszólagos alakjának megváltozásának, belső átrendeződésének valamiféle átlagos jellemzése, leírása tűnik.

3.2 *Az alakváltozás*

3.2.1 *A fizikai jelenség*

Az alakváltozást fizikailag a rudak vagy lemezek egyszerű alakváltozási állapotaival – húzás-nyomás, tiszta nyírás, hajlítás, hajlítási nyírás, csavarás – mutathatjuk be: egy egyenes prizmatikus, illetve egy egyenes körhenger alakú rudat vagy próbatestet húzzuk-nyomjuk, nyírjuk, hajlítjuk vagy csavarjuk. Példaként tekinthetjük a féltér, vagy bármely véges test alakjának megváltozását akár koncentrált, akár megoszló terhelés hatására. Szigorú értelemben az alakváltozás folytonos alakváltozás. Továbbá, csak a rugalmas alakváltozás tekinthető folytonos alakváltozásnak.

Szemlélet alapján a tészta gyúrása, a fémek képlékeny alakítása, folyadékok folyása alakváltozással leírható. Mint arra fentebb, az átrendeződés esetén már kitértünk, ezekben az esetekben az anyag nem deformálódik, hanem átrendeződik. Ezekben az esetekben az alakváltozás – azaz az alak megváltozása – nem folytonos, az anyagban szakadási felületek alakulnak ki. A szakadás nem közvetlenül az anyagra vonatkozik, többnyire az eltolódási mező szakadásos, maga az anyag még folytonos marad abban az értelemben, hogy az anyagokat alkotó atomok és/vagy molekulák szervesen kapcsolódnak egymáshoz még az eltolódásmező szakadásos felülete, felületei mentén is: a kötések felbomlanak, átrendeződnek, új kötések jönnek létre. Ezért ezeket az alakváltozásokat tekinthetjük kvázi- vagy szemi-folytonos alakváltozásnak. Ide tartozik – általánosítva a folytonos alakváltozás fogalmát – a „nagy rugalmas alakváltozás”, a „folyás típusú alakváltozás” és az „átrendeződéssel létrejött alakváltozás” is. Hangsúlyozzuk, hogy a folyás típusú alakváltozás maradó alakváltozást foglal magába, azaz nem folytonos alakváltozást, hanem átrendeződést.

Azokat az alakváltozásokat, amelyek az anyagban tényleges szakadási felületeket hoznak létre, hasadással, töréssel, szakadással jellemezzük. Ezeket a jelenségeket nem az alakváltozás, hanem a tönkremenetel keretén belül szokás vizsgálni. Jelen tanulmányban ezzel a kérdéskörrel nem foglalkozunk.

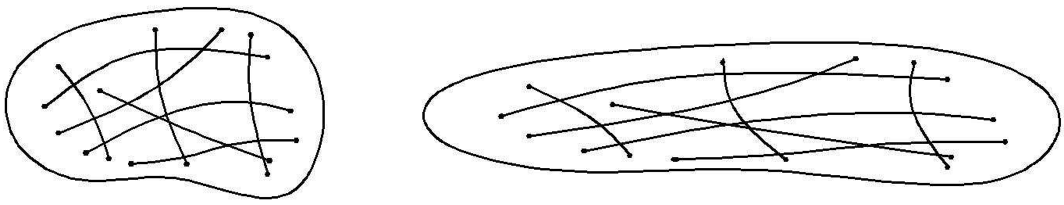
3.2.2 *Matematikai értelmezés*

Matematikailag a folytonos és szakadásos alakváltozás között a kontinuummechanika szakirodalmában nem szokás különbséget tenni. Mind a rugalmas, mind a képlékeny, mind a reológ tartományban azonos alakváltozási fogalmat és összefüggéseket alkalmaznak.

Az alakváltozás értelmezéshez be kell vezetni a mérést lehetővé tevő matematikai struktúrát. Ez a metrikus tenzor, pontosabban a metrikus tenzormező. A metrikus tenzor teszi lehetővé, hogy megmérjük egy görbe hosszát, egy felületidom területét, egy háromdimenziós tartomány térfogatát. Ugyancsak a metrikus tenzor szükséges két, egymást metsző görbe szögének meghatározásához is.

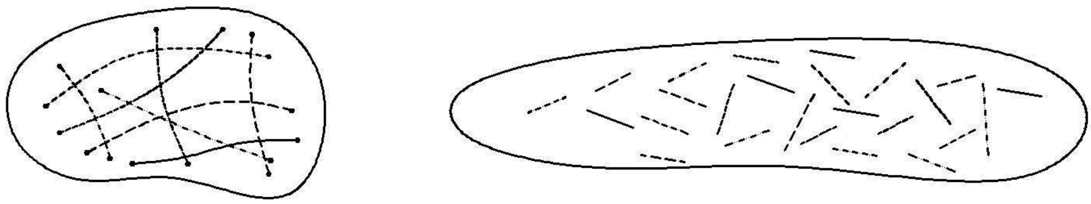
Egy folytonos görbe relatív megnyúlása alatt a görbe deformáció utáni és előtti hossza különbségének és a deformáció utáni hosszának az arányát (hányadosát) értjük.

Egy test alakváltozása alatt a testbe írható összes folytonos görbe relatív megnyúlásának az összességét értjük (lásd a 6. ábrát).



6. ábra. Az alakváltozás, mint folytonos leképezés

Az alakváltozás és az átrendeződés közötti különbséget a testbe írható görbék relatív megnyúlásával, illetve szakadásával jellemezhetjük. A körülírás helyett lásd a következő, 7. ábrát.



7. ábra. Az átrendeződés, mint szakadásos leképezés

Az ábrából azonnal leolvasható, hogy az alakváltozás globális értelmezése automatikusan választja szét a folytonos alakváltozást a különböző átrendeződésektől, és mutatja, hogy az átrendeződés nem tekinthető folytonos alakváltozásnak.

Megjegyzés: a leképezés „összekeveri” a szomszédos elemeket, magát a leképezést keverőnek tekinthetjük. A káoszelméletben – pl. egymásra hajtogatom majd nyújtom a leképezett tartományt – éppen így értelmezik a keverő leképezést.

A fenti értelmezés globálisan jellemzi a test alakváltozását, és nem ad alakváltozási mezőt, hanem csak azt adja meg, hogy bárhogyan is jelöljünk ki egy folytonos görbét a testen belül, akkor annak ismert a relatív megnyúlása. De, ha minden görbe relatív megnyúlás ismert, akkor ismert minden pontban, azon belül minden irányban a bázisnak (egységnyi hosszúságú szakasznak) a relatív megnyúlása, továbbá ismert két, egy ponthoz tartozó bázis végét összekötő görbék relatív megnyúlásai. Az első csoportba tartozó relatív megnyúlások megadják lokálisan a lineáris alakváltozást minden pontban és minden irányban, a második csoportba tartozó relatív megnyúlások megadják a szögváltozást minden pontban és minden irányban. Ezzel együtt értelmeztük lokálisan (is) az alakváltozást.

A folytonos test – egy topológiai sokaság valamely korlátos és zárt tartományaként modellezzük a folytonos testet – folytonos leképezését minden pontban annak differenciáljával, tehát egy lineáris leképezéssel adjuk meg. Ez teszi lehetővé azt, hogy nem szükséges minden irányban ismerni az alakváltozást, azaz a leképezést, elegendő a bázisirányokban.

Az alakváltozás globális értelmezése összhangban van azzal, hogy globálisan tudjuk az alakváltozás mérni, lokálisan nem.

Az alakváltozás globális értelmezése lehetőséget ad a kis és a nagy alakváltozások megkülönböztetése. Kicsinek azt az alakváltozást fogjuk tekinteni, aminek a során a testbe írható összes folytonos görbe relatív megnyúlása egy kicsi, az egy mellett (0,01 vagy 0,001) elhanyagolható értéknél kisebb [Lámer, 1990]. Ebből azonnal következik, hogy az alakváltozás lokális jellemzője is kicsi, és az egy mellett elhanyagolható.

Mivel az alakváltozást a görbék hosszának megváltozásával értelmezzük, ezért a vizsgált terünket olyan matematikai struktúrával kell ellátni, amely lehetővé teszi a görbék hosszának a meghatározását.

A metrikus tenzor(mező) az a matematikai struktúra, amely lehetővé teszi a görbék hosszának a meghatározását. E mellett alkalmas felületek területének, tartományok térfogatának, valamint két görbe által bezárt szög meghatározására is. Az alakváltozás a méretek megváltozását fejezi ki. Megmutatható, hogy a mérés lehetőségét csak a metrikus tenzor biztosítja. Megmutatható az is, hogy a deformáció előtti és utáni metrikus tenzorok különbségének a fele döntő fontosságú matematikai tulajdonsággal bír: az így nyert deformációs mértéktenzor főátlóbeli elemeinek segítségével határozható meg egy görbe relatív megnyúlása és a mellékátlóbeli elemek segítségével határozható meg két görbe által bezárt szög megváltozása [Love, 1927, Lur'e, 1970, Lámer, 1990].

3.2.3 *A kettő kapcsolata*

Először is rögzítünk két tényt. Az első, hogy a folytonos alakváltozás leírására bevezetett folytonos tenzormező összhangban van a folytonos modellel. A második, hogy a szakadásos alakváltozások leírása a folytonos alakváltozásra kimunkált alakváltozás fogalommal nincs összhangban, másképpen fogalmazva, a folytonos alakváltozás fogalma nincs matematikailag összhangban az átrendeződéssel végbemenő alakváltozással.

A továbbiakban a folytonos alakváltozással foglalkozunk.

A folytonos alakváltozás fizikai és matematikai kapcsolatát valójában a matematikai oldal határozza meg. Matematikai szempontból ragaszkodunk ahhoz, hogy az alakváltozást leíró matematikai objektum tenzormennyiség legyen. A tényleges kapcsolat mibenlétét az előző pontban már vázoltuk: a deformáció előtti és utáni mértéktenzorok különbségének a fele alakban felírt deformációs mértéktenzor főátlóbeli elemeinek segítségével határozható meg egy görbe relatív megnyúlása és a mellékátlóbeli elemek segítségével határozható meg két görbe által bezárt szög megváltozása.

A matematikai nehézséget a távolság és szög fogalmának egymástól független értelmezése szolgáltatja. A távolságot a Püthagorasz-tétel alapján határozzuk meg. Ezért a relatív nyúlás kifejezésben négyzetgyökös kifejezések állnak. A szöget egy derékszögű háromszögben az oldalak arányával értelmezzük. Ezért a szög megváltozására vonatkozó összefüggésben egy koszinuszos kifejezés áll. A két mennyiség nem alkot tenzormennyiséget. Az áhított tenzoriális tulajdonságot sorfejtéssel lehet „elővarázsolni”, de ennek magas az ára: csak a sorfejtés első tagjaira nézve egyezik meg a négyzetgyök és a koszinus függvény Taylor-sora, ezért akkor és csak akkor nyerünk alakváltozási tenzort, ha a sorfejtést az első tagig végezzük [Lámer, 1985b, 1990, 1992-93]. Ez önmagában még nem jelent feltétlen nehézséget, hiszen van egy alakváltozási tenzorunk – ennek létrehozását tűztük ki célul. A kérdés az, hogy az a tenzor, amelyet egy sorfejtés első tagjaként vezettünk be, hogyan viszonyul a fizikai alakváltozásokhoz.

Matematikai szempontból a sorfejtésnek az első tagra vonatkozó szűkítése azt jelenti, hogy sem a relatív nyúlások, sem a szög abszolút megváltozása nem lehet túl nagy, pontosabban, mindkettőnek az egy mellett elhanyagolhatónak kell lennie. Ez kb. egy század, vagy egy ezred relatív megnyúlást és kb. egy fok szögváltozást tesz lehetővé. Ez összhangban van a folytonosan deformálódó anyagok viselkedésével. A rugalmas anyagok relatív megnyúlása egy század és egy tízezred közé esik. A rugalmas anyagok szögváltozása sem haladja meg az egy fokot. Az ennél nagyobb mérvű alakváltozások esetén a modell nem használható. Még van egy további megkötés: a koordinátarendszernek ortogonálisnak, vagy legalábbis közel ortogonálisnak kell lennie, de ennek ismertetésétől eltekintünk [Lámer 1990]. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy a vizsgált test alakjának ennél nagyobb mérvű megváltozása már nem folytonos, hanem szakadásos, és valójában nem a test folytonos alakváltozásával, hanem az anyag átrendeződésével megy végbe. Ezért ennek leírására más matematikai modellt kell alkalmazni.

Végül jelezzük, hogy a nem folytonos, azaz a szakadásos alakváltozások – átrendeződések – egyes eseteiben sem nagyobbak az alakváltozások, mint néhány század vagy ezred, mint pl. egyes képlékeny folyásnál, ezért nem zárható ki, hogy a folytonos alakváltozás fogalma kellő pontosságú leírást ad. Ugyanakkor, ha lényegesen nagyobbak, mint például a képlékeny hengerlésnél, vagy nagy rugalmas alakváltozásnál, akkor kétséges, hogy vajon a folytonos leírás alkalmazható-e.

4 ERŐTANI (DINAMIKAI) KÉRDÉSEK: BELSŐ ERŐK ÉS FESZÜLTSÉGEK

A dinamika alatt nem az időtől való függést fogjuk érteni, hanem azt, hogy a testekre erők hatnak, hogy a testeken belül belső erők ébrednek.

A fejezet címében szereplő „belső erők” és „feszültségek” kifejezések kapcsán a következő megjegyzést tesszük. Erők alatt következetesen koncentrált erőt fogunk érteni. Amennyiben az erőhatás megoszlik vonal mentén, felületen, vagy tértartományon, akkor az erő kifejezést jelzős szerkezetben alkalmazzuk: vonal vagy felület mentén megoszló erőről, vagy térfogati erőről fogunk beszélni. Rudak esetén szokás belső erőről, mint például húzó-nyomó erőről, hajlítási nyíróerőről beszélni. Itt a belső erőt másodlagosnak tekintjük, hiszen ezeket az erőket a rúd egy keresztmetszetében értelmezzük a keresztmetszetben ható normál-, illetve nyírófeszültségek eredőjeként. Hasonló megjegyzés tehető lemezek és héjak keresztmetszeteiben értelmezett megoszló belső erők kapcsán is. Ennek okán belső erők alatt jelen tanulmányban csak a szemcsékből álló halmazokban, az érintkező szemcsék között kialakuló mechanikai kapcsolat dinamikai modelljét értjük. A feszültségnek pedig a folytonos testekben az „érintkező” elemi felületek között kialakuló mechanikai kapcsolat dinamikai modelljét tekintjük. Szokás néha a feszültségeket is belső erőknek tekinteni, de tekintettel arra, hogy a feszültség tenzor jellegű mennyiség, az erő vektor jellegű mennyiség, továbbá, hogy a feszültséget éppen úgy fogjuk értelmezni, hogy annak egy területen vett integrálja adjon erő jellegű mennyiséget, jelen tanulmányban a feszültség fogalmára nem fogjuk alkalmazni a belső erő kifejezést. Megjegyezzük, hogy a gázok és folyadékok esetén használatos fogalom a nyomás. Megmutatjuk, hogy fogalmilag – értsd: matematikailag – a feszültség rokona, de fizikai hátterét tekintve gyökeresen tér el a feszültségtől.

Az erőtani kérdések tárgyalásánál megismételjük a geometriai kérdések tárgyalásánál tett megjegyzést, hogy a kontinuum ponthalmaz, a szemcsehalmaz véges méretű, egyszer s mindenkorra rögzített alakú, zárt ponthalmazok – ha úgy tetszik, véges tartományok – halmaza.

4.1 *A belső erők*

4.1.1 *A fizikai jelenség*

A belső erő ébredését a szemcsehalmazban igen nehéz megmutatni: ugyanis mérni erőt sosem tudunk, egyedül hosszat vagyunk képesek (összehasonlítással) mérni. Megjegyezzük, hogy az erőhöz közelálló súly mérése is összehasonlításon alapul – vesszük a próbatestet és a mérendő testet, belehelyezzük a mérleg egy-egy serpenyőjébe –, és pl. szögváltozás mérésére – a mérleg nyelve kilendül – vezetjük vissza. (Összetettebb mérleg esetén további mechanikai és/vagy fizikai elméleteket használunk fel.)

A szemcsehalmazon belüli erő mérése – a szerző álláspontja szerint – jelenleg nem oldható meg. Az álláspont részletes kifejtése helyett, csak utalunk arra, hogy mérőcellák szemcseként való alkalmazásával, vagy a feszültségbélyegek felhelyezésével nyerhetünk információt, de a korrekt kiértékeléshez ismerni kell az erő támadáspontja és a mérőeszköz egymáshoz viszonyított helyzetét, és alkalmazni kell valamilyen elméletet arra nézve, hogy egy szemcsére ható koncentrált erőrendszer hatására milyen értéket mérünk a mérőcellában vagy feszültségbélyegben. Az erőnek a mérőcellához viszonyított helyzete nem mérhető a halmaz átrendeződése miatt. Ha a mérési eredményből kívánjuk a mérési pont és az érintkezési pont egymáshoz viszonyított helyzetét meghatározni, akkor tovább kell növelni a mérési pontok számát, ami újabb mérőcellák elhelyezését kívánja meg (ad infinitum).

A szemcsehalmazban ébredő belső erők hatásaként a szemcsehalmazt magába foglaló edény oldalfalában mérhetünk nyomást vagy egyes speciális esetekben – nagy szemcsékből álló halmazra gondolva, ahol a mérőcella kisebb, mint egy-egy szemcse – „pontszerű” mérőcella elhelyezésével a szemcsehalmaz „oldalnyomását” mérhetjük meg egy-egy pontban. Itt teszünk egy megjegyzést, hogy a szemhalmazban éppenséggel nem a függőleges falra ható vízszintes oldalnyomás a jellemző, ez egy mesterséges helyzet; a szemcsehalmazban éppenséggel az egymásra támaszkodó szemcsék közötti erőhatás a jellemző, ezért igazából a szemcsék felfekvését, egymásra támaszkodását modellező felület, vagy mérőcella-elhelyezés adhat értékelhető mérési eredményt. Ugyanakkor azt is hangsúlyozni kell, hogy az apró szemcsékből álló halmazokban, mint például a szemcsés talajok, éppenséggel az oldalnyomás jellege lesz az, amely a folyadéktól, illetve szilárd testtől való elkülönítést megalapozza. Végül rá kell mutatni arra is, hogy ebben az esetben már egyfajta kontinuális leírásmódot alkalmazunk diszkrét elemek – szemcsék – halmazára.

A szemcsehalmazban ébredő belső erők kialakulására, eloszlására, nagyságára következtethetünk az átboltozódás és befeszülés kapcsán is, bár a szerző álláspontja szerint átboltozódás csak olyan szemcsehalmazban jöhet létre, ahol a szemcsék között nem csak nyomó, hanem egyszerre nyomó és húzó igénybevétel is ébredhet ugyanabban az érintkezési „pontban”. Ez úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a konvex szemcséket össze kell ragasztani ahhoz, hogy boltozat alakulhasson ki. A silókban történő befeszülés esetén éppen ez az összeragadás megy végbe, hiszen csak mechanikai erő bevetésével képesek az átboltozódott szemcsehalmazt összetörni, és rábírni a szemcséket a szemcsehalmazokra jellemző folyás típusú mozgást kialakítására, azaz a siló elhagyására.

4.1.2 *Matematikai értelmezés*

A szemcsehalmazokban két érintkező szemcse között ébredő hatás dinamikai modellje az erő: vektormennyiség, rendelkezik hatásvonallal, támadásponttal, érvényes rá a hatás-ellenhatás elve. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a klasszikus newtoni mechanikában megszokott erőfogalmat használjuk. Természetesen hozzágondolva, hogy amíg a newtoni mechanikában az erő, mint modell, az anyagi pont mozgásállapota megváltozásának leírására lett bevezetve, addig mozgás híján egyensúlyban lévő szemcsék egyensúlyát leíró vektormennyiségekről van szó.

A szemcsés közegben két érintkező szemcse érintkezési pontjában ébred a belső erő. A szemcsék lehetnek szárazak, súrlódásosak és kötöttek – értsd: ragasztóval kapcsolódnak egymáshoz. A száraz szemcsék esetén a belső erő hatásvonala a két érintkező felület közös normálisának az irányába mutat. (Itt hallgatólagosan feltételezzük, hogy a szemcsék felülete sima.) Súrlódás esetén a belső erő hatásvonala eltér a közös normálistól. Kellően sima felületek és gömbölyű szemcsealakok esetén a súrlódás nem jelentős, az egyensúly beállásában elsősorban nem a csúszás és így nem a csúszási súrlódás, hanem a gördülés és a gördülési súrlódás játszik szerepet, amely utóbbi az előbbihez képest elhanyagolható. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy súrlódás érdes felületek és nem gömbölyű, hanem síkokhoz közelálló felületekkel határolt szemcsék esetén jelentős hatással bír. Jelezzük, hogy a súrlódás statikailag határozatlan kapcsolatnak tekintendő. Ragasztó – ez lehet egy vízfilm, lehet a szemcséket természetes úton cementáló kémiai kötés, vagy lehet a mesterségesen előállított cement – a diszkrét halmazt átalakítja folytonos közeggé még akkor is, ha a folytonos közeg a szemcsék közötti (közel) pontonkénti érintkezés folytán többszörösen összefüggő tartományt alkot. Ekkor a szemcsék között „belső erőkként” nem koncentrált, hanem megoszló erő – feszültség – lép fel az összeragasztott felület mentén, és a kapcsolatot dinamikailag legkevesebb erővel és nyomatékkal kell modellezni. Ezt az esetet folytonos közegként és nem szemcsehalmazként értelmezzük. Vizsgálatuk kívül esik e tanulmány keretein.

4.1.3 *A kettő kapcsolata*

A pontszerű érintkezés és a koncentrált erő logikailag összhangban van.

Az kontinuális leírásmódban az oldalnyomás a szemcsés szerkezettel jól illusztrálható-magyarázható, a talajmechanikai tapasztalatok az oldalnyomás létét igazolják. Ugyanakkor ki kell hangsúlyozni, hogy a folytonos eloszlású nyomás vagy feszültség nincs összhangban a szemcsés szerkezettel: az előbbi folytonos, az utóbbi diszkrét szerkezetű.

4.2 *A feszültség*

4.2.1 *A fizikai jelenség*

Mint azt korábban jeleztük, a folytonosnak modellezett testekben ébredő belső felület mentén megoszló erők, nyomások és feszültségek fizikai háttere más és más.

A nyugalomban lévő – értsd: valamely edénybe bezárt – légnemű testekben nyomást értelmezünk. A nyomás fizikailag a sebesen mozgó atomok és/vagy molekuláknak a gázt magába foglaló edény oldalfalával való ütközéseivel magyarázható. A nyomást egységnyi területű felületre és időegységre vonatkoztatjuk. Magában a légnemű testen belül nincs fal, a légnemű testen belül csak a száguldó atomok és/vagy molekulák vannak. Azok pedig nem ismernek sík felületet, az egyes ütköző atomok és/vagy molekulák ütközés során az érintkező pontok nem alkotnak egységes felületet, és az egyes ütközésekben részt vevő felületek normálisai sem alkotnak párhuzamos nyalábot. Legfeljebb mi képzeljük el, hogy a légnemű testben képzeletben kijelölt bármely belső felület mentén pont ugyanaz a folyamat megy végbe, mint a határán, az edény falánál. A nyomást a nyugalomban lévő légnemű testekben, a test minden pontjában, és egy-egy pontján belül minden irányban azonosnak tekintjük, még ha a rendszertelen mozgás és a nem egyenletes sebességeloszlás miatt valójában nem is azonos.

Megjegyezzük, hogy a leírást illik árnyalni annyiban, hogy sok ütközés átlagáról van szó, de ez az eredendő fizikai képet – ütközés → impulzuscsere → nyomás – nem változtatja meg.

Megjegyezzük azt is, hogy a gravitációs térben, egy kellően magas edényben, sűrűségkülönbség alakul ki a magasság mentén, és ennek következtében a nyomás a magassággal változik.

Az áramló légnemű testben is értelmezzük a nyomást; ebben az esetben is a mozgó atomok és/vagy molekulák segítségével. Áramló gáz esetén eltekintünk a gázt alkotó atomok és/vagy molekulák rendszertelen mozgásától, és azonnal egy áramló gázsugárra gondolunk, amelynek áramlási sebessége van. A nyomást e sebességhez kötjük. Ennek megfelelően egy áramló légnemű testben a sebességtér változásának megfelelően a nyomás is pontról pontra, azon belül irányról irányra változik.

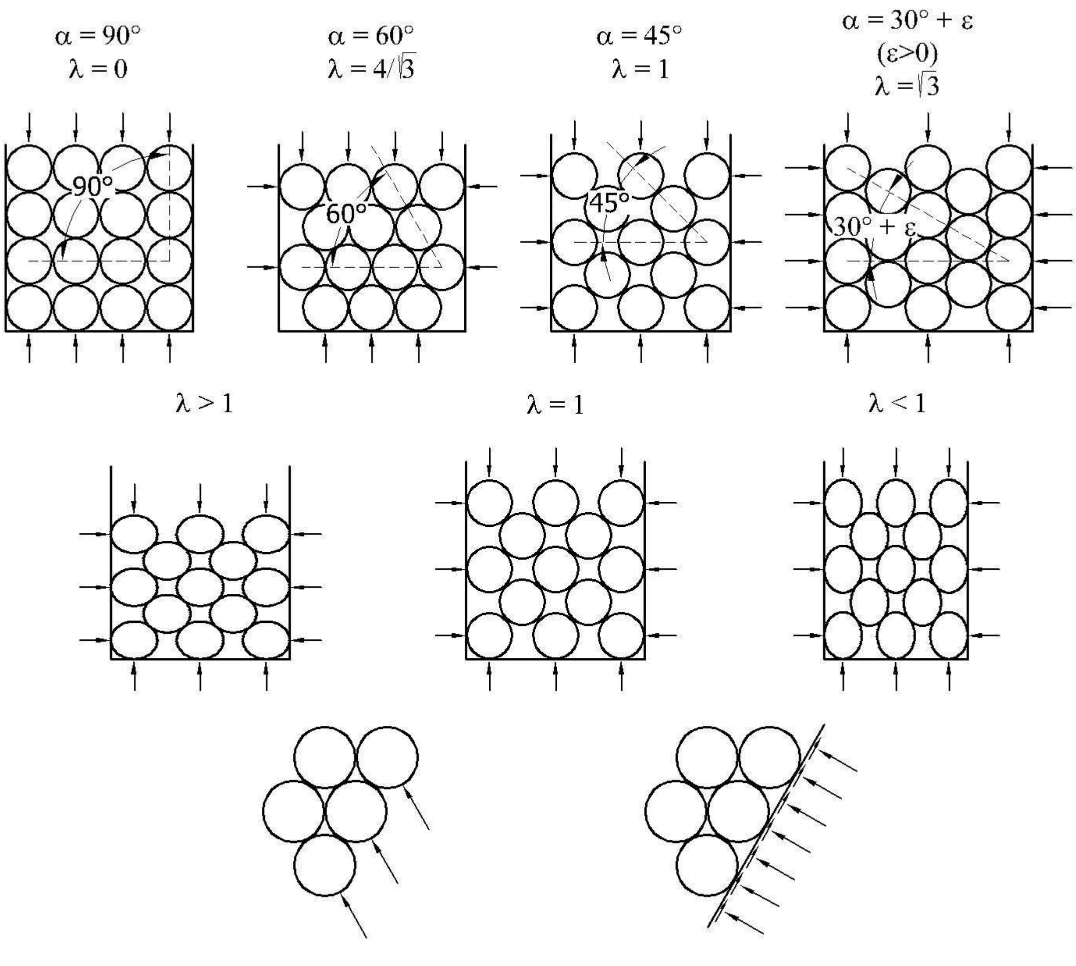
A folyékony testekben is nyomást értelmezünk. Ugyan a folyadékban is szabadon mozognak az atomok és/vagy molekuláknak, de az ebből származó ütközésből nem értelmezünk nyomást. A nyomást – a gázhoz hasonlóan – a folyadékot magába foglaló edény oldalfalára gyakorolt hatásként értelmezzük. Ennek magyarázatához két fizikai jelenséget veszünk figyelembe. Az egyik a folyadékoszlop súlya, ez hat az edény aljára, ad abszurdum, az edény tetejére. Ez utóbbi szemléltetésére inkább a folyadék felszínén úszó testek alsó felületét említjük meg. A másik a folyadék oldalnyomása; ez hat az edény oldalfalára. Ha az edény nem tartaná a folyadékot, ez utóbbi szétfolyna. A tapasztalat az, hogy az oldalnyomás értéke megegyezik a függőleges nyomás értékével. A nyomást a folyadékok esetében is egységnyi területű felületre vonatkoztatjuk. Magában a folyékony testen belül nincs fal, folyékony testen belül csak az „egymásra támaszkodó” atomok és/vagy molekulák vannak. Azok pedig nem ismernek sík felületet, az egyes egymásra támaszkodó atomok és/vagy molekulák „támaszpontjai” (érintkezési pontok) nem alkotnak felületet, és támaszpontokban az érintkező felületek normálisai sem alkotnak párhuzamos nyalábot. Legfeljebb mi képzeljük el, hasonlóan a légnemű testekhez, hogy a folyékony testekben gondolatban kijelölt bármely belső felület mentén pontosan ugyanaz a folyamat megy végbe, mint a határán, az edény falánál.

A tapasztalat alapján azt mondjuk, hogy a folyadékban nyírással szembeni ellenállás, azaz belső megoszló nyíróerő, a kontinuális modell szakkifejezése szerint, nyírófeszültség nem lép fel. Ezt tekinthetjük annak okaként, hogy egy-egy pontban minden irányban a nyomás azonos értékű.

A nyugalomban lévő folyékony testekben a nyomás eloszlása a következő: az azonos értékű függőleges nyomásértékek jelölik ki a nívófelületeket, gravitációs térben, egy kis léptékben, ez többnyire egy síkkal, egy nagyobb léptékben a geoiddal egyezik meg. Egy-egy nívófelület minden pontjában, minden irányban azonosnak tekintjük a nyomást. A mélységgel – a gravitáció irányával – növekedve a nyomás értéke nő.

Az áramló folyékony testben a mozgó atomok és/vagy molekulák segítségével is értelmezünk nyomást. Áramló folyadék esetén nem tekintünk el a folyadék súlyából adódó nyomástól, mindemellett az áramlás kapcsán egy áramló folyadéksugárra gondolunk, amelynek áramlási sebessége van. Az áramlási nyomást e sebességhez kötjük. Ennek megfelelően egy áramló folyékony testben a sebességtér változásának megfelelően a nyomás is pontról pontra, azon belül, irányról irányra változik.

Érdemes emlékeztetni arra, hogy a Világűrben – légköri nyomás nélkül – végzett kísérlet szerint a folyadék egy alaktalan massza, amit a felületi feszültség tart össze, és az asztronauták egy újjak alakították a „folyadékcsepp” alakját.



8. ábra. Oldalnyomás és belső szerkezet. A nyíróerő a szemcsehalmazban egy ferde metszősíkon

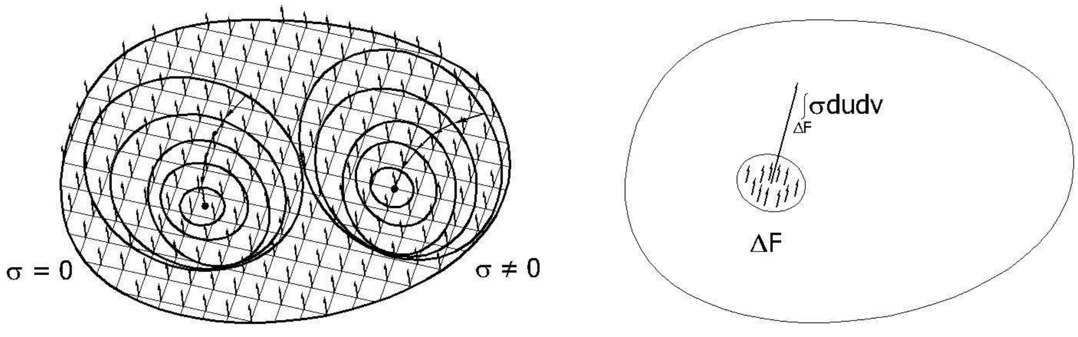
A szemcsés közegben, különösen, ha a szemcsék mérete elenyésző a vizsgált tartományhoz képest, szokás megoszló belső erőt értelmezni. Hasonlóan a folyadékhoz, edényben lévőnek képzeljük a halmazt. Az edény alján és oldalfalán egyaránt nyomás ébred. Elsősorban talajmechanikai tapasztalatból tudjuk, hogy a függőleges nyomás arányos a közeg, azaz a szemcseoszlop súlyával, a vízszintes nyomás arányos a függőleges nyomással és egy arányossági tényezővel. Ezt az arányossági tényezőt 0,3 és 0,5 között szokás felvenni. Az, hogy oldalnyomás ébred a szemcsés közegben, felveti azt a kérdést, hogy vajon ébred-e benne nyírófeszültség vagy sem. A szemcsézett struktúra miatt sem nyírófeszültség, sem húzófeszültség kialakulásával nem számolhatunk: a szemcsék csak támaszkodnak egymásra. Az oldalnyomás 1-től elérő arányossági értékét a szemcse alakja és helyzete magyarázza. (Lásd a 8. ábrát.) Egyúttal az egymásra támaszkodás mikéntje magyarázza, hogy nyírófeszültségre nincs szükség, továbbá a sem nem függőleges, sem nem vízszintes kapcsolati erők éppen kiadják azt a ferde erőt, amelyet a folytonos testben nyírófeszültségként értelmeznők. (Lásd a 8. ábrát.)

A feszültséget – vagyis felület mentén megoszló belső erőt – fizikailag a rudak vagy lemezek egyszerű igénybevételeivel – húzás-nyomás, tiszta nyírás, hajlítás, hajlítási nyírás, csavarás – mutathatjuk be: egy prizmatikus, vagy körhenger alakú rudat vagy próbatestet húzzuk-nyomjuk, nyírjuk, hajlítjuk vagy csavarjuk. Ekkor a keresztmeszetekben egyenletesen megoszló normál vagy nyírófeszültséget tételezünk fel; a kivételt természetesen a hajlítás nyíróerő adja, aminek az esetében kvadratikusan megoszló nyírófeszültséget tételezünk fel. Általánosítva a rúd vagy lemez keresztmetszetét, tekinthetünk bármely háromdimenziós testet, amelyből egy-egy elemi hasábot kivágva, annak mind a hat felületén három-három megoszló „belső erőt” értelmezünk: egy normál- és két nyírófeszültséget.

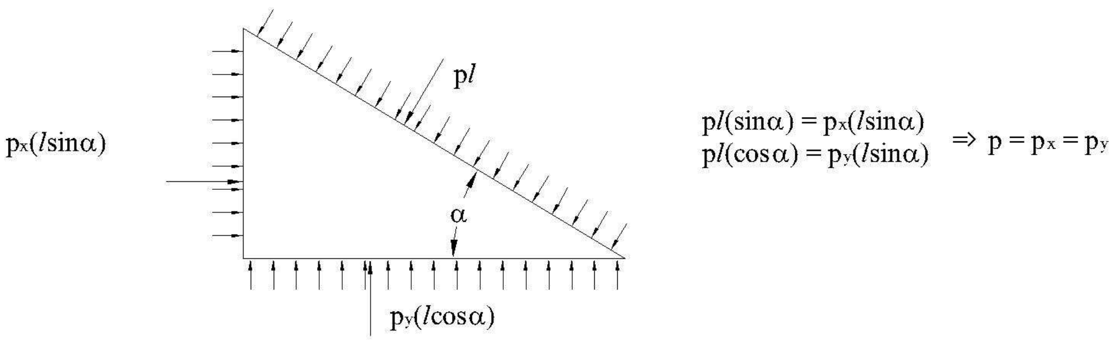
Rá kell mutatni arra, hogy a feszültség – hasonlóan a nyomáshoz, vagy a szemcsés közegben az érintkezési belső erőkhöz – közvetlenül nem mérhető. Az alakváltozás hipotézisét felhasználva határozzuk meg a feszültség eloszlását, mérni az alakváltozást, illetve áttételesen a próbatestre ható erőt és/vagy nyomatékot mérjük.

4.2.2 *Matematikai értelmezés*

A feszültséget – és így áttételesen a nyomást – posztuláljuk: a feszültségnek tekintjük azt a felületen értelmezett folytonos függvényt, amelyet egy véges és kicsiny felületidomon (többnyire síkidomon) integrálva erő jellegű mennyiséget kapunk. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a feszültséget nem levezetjük az erő per az erő „hatásfelületének” a területe határátmenetéből, midőn az utóbbi tart a nullához, hanem posztulálunk egy, a fenti tulajdonsággal bíró függvényt. Megjegyezzük, hogy a határátmenet korrektül nem értelmezhető. Ha diszkrét pontokban adunk meg erőt, akkor nem nyerünk folytonos függvényt, ha eleve folytonos függvény adunk meg, akkor az erő kiszámításához először integrálni kell a felületen – ezt javasoljuk megtenni mi is a feszültség értelmezéséhez –, majd osztani kell a felület területével és venni a határátmenetet. Ez, ebben a leírásban, tautológia. (Lásd a 9. ábrát.) Egyúttal felhívja a figyelmet arra, hogy a feszültség nem általánosítható oly módon, hogy tekintsünk egy felületen ható nyomatékot, valamint a nyomaték „hatásfelületének” a területe hányadosát és vegyük annak határértékét, midőn az utóbbi tart a nullához. E helyett eleve értelmezni kellene a nyomatéki-feszültséget. Ez utóbbi esetében a nehézséget az jelenti, hogy a nyomaték származtatott mennyiség: erő és erőkar vektoriális szorzata (úgy is fogalmazhatjuk, hogy irányított terület), ezért nyomatéki-feszültség nem értelmezhető [Lámer, 1984a, 1985a, 2007b].



9. ábra. A feszültség értelmezéséhez

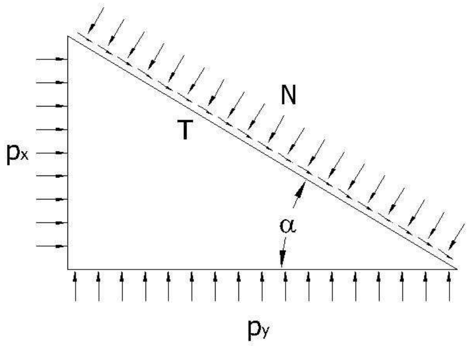


10. ábra. A hidrosztatikus nyomáshoz

Megjegyezzük, hogy az a tény, hogy a feszültség tenzormennyiség, abból a követelményből fakad, hogy egy elemi kockának egy síkkal vett metszete – ezt többnyire derékszögű tetraéderként szokás felvenni – egyensúlyban van. Megjegyezzük azt is, hogy a feszültségtenzor szimmetrikus tenzor, ami a nyomatékra vonatkozó egyensúlyi feltételek teljesüléséből fakad.

Az elemi hasáb egy metszete, egy derékszögű elemi tetraéder egyensúlyának vizsgálatával igazolható, hogy ha nyíróerő nem lép fel, akkor minden felületen azonos nagyságú – hidrosztatikus – nyomásnak kell ébrednie (10. ábra).

Felmerül az a kérdés, hogy vajon, ha a nyíróerő értéke korlátos, akkor az oldalnyomás értéke is korlátos-e? Ezt a feltevést nem sikerült igazolni (11. ábra).



$$T \le \mu N \qquad p_x = \lambda p_y \qquad \lambda \le \frac{1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \mu \operatorname{tg}\alpha}$$

11. ábra. Az oldalnyomás és a korlátos nyíróerő kapcsolatához

4.2.3 *A kettő kapcsolata*

A folytonos anyagmodell és a feszültségtenzor logikailag összhangban van.

A gázokban, a folyadékokban és a szemcsés közegekben a szakadásos alakváltozás esetén a feszültségtenzor is szakadásos, ezzel együtt kijelenthető, hogy a folytonos eloszlású nyomás vagy feszültség nincs összhangban a szemcsés szerkezettel: az előbbi folytonos, az utóbbi diszkrét szerkezetű. Felmerül az a kérdés, hogy szakadásos alakváltozás esetén értelmezhető-e a feszültségtenzor. Sejtésként fogalmazzuk meg, hogy egy diszkrét rendszerben matematikai értelemben feszültségmező nem értelmezhető, e helyett valamilyen más fogalmat kell értelmezni a rendszer belső dinamikai állapotának a leírásához.

5 AZ ANYAGTÖRVÉNYEK

5.1 *Bevezetés. Irodalmi kitekintés*

Az anyagtörvényt általában egy mechanikai modell két – a kinematikai és a dinamikai – oldala közötti kapcsolatként szokás értelmezni.

Hallgatólagosan a deformálható szilárd testben ébredő feszültség és kialakuló alakváltozása közötti összefüggést szokás anyagtörvénynek tekinteni. Ugyanakkor az erő és a gyorsulás közötti összefüggés is a modell két oldala közötti kapcsolat (lásd pl. [Tonti, 1972], [Verhás, 1989], [Matolcsi, 1992], [Ván, 1995], [Ván et al. 2008]). Ennek megfelelően az anyagi pontok esetében a tömeg, merev testek esetében a tehetetlenségi tenzor, a folytonos közeg esetén a sűrűség az anyagot jellemző „állandó”, az állapotegyenlet – az impulzus egyenlő a tömeg szorozva gyorsulással – egyúttal anyagegyenlet is. Megjegyezzük, hogy ezt az összefüggést a benne szereplő fogalmaknak többnyire az elmozdulásra való „visszavezetésével” (pl. a gyorsulásnak az idő szerinti differenciálhányadosaként való értelmezésével) inkább a mozgás egyenletének szokás tekinteni; lásd pl. [Budó 1972].

A folytonos test anyagi viselkedésről, a különböző fizikai jelenségekről részletes áttekintést ad [Bell, 1973].

A folytonos test anyagi viselkedés matematikai modelljeiről részletes áttekintést ad [Truesdell és Noll, 1963].

Az általánosított kontinuum anyagi viselkedéséről több a hipotézis, mint a mérési eredmény. Néhány mérési eredményt tartalmaz [Eringen, 1998] műve.

A belső szerkezettel bíró test anyagi viselkedésről bővebben a nemlokális rugalmasság keretén belül [Kunyin, 1975] értekezik.

A belső szerkezet kapcsán az újabb elméleti és numerikus modelleket lásd például [Guyer és Johnson, 2009], valamint [Capriz és Mariano 2007] és [Capriz et al. 2008].

A szemcsés közegek folytonos leírást lásd még [Duran, 2000], [Herrmann et al. 1998], [Kolymbas, 2000], [Nedderman, 1992], [Revuzhenko, 2006] [Ristow, 2000].

A matematikai fizika primer és duális egyenletrendszerének a térben értelmezhető primer és duális cellákkal való kapcsolatát [Tonti, 1972] mutatja be. A szemcsés közegben az alakváltozást és a feszültséget a szemcseszerkezetben értelmezhető cellák és duális cellák, érintkezési pontok és néhány további geometria fogalom segítségével fogalmazza újra [Bagi 1996]. A szemcsés közegben az anyagi összefüggéseket explicite nem írja föl, hanem a szemcsés közeget a rúdszerkezetek elméletében megszokott közelítésmóddal írja le, ezen belül az egyes szemcsékre és az egyes szemcsék kapcsolatára nézve használ fel anyagi összefüggéseket. Végeredményben lokális – érts: szemcsénként, szemcsék érintkezéseiben – jellemzésből, figyelembe véve az egyes érintkező szemcsék egymáson történő elfordulását, globálisan írja le a közeg viselkedését. Formálisan a közeg egészére anyagi összefüggés felírására nincs szüksége [Bagi, 2005]; jelen tanulmányban ehhez hasonló megközelítést javaslunk, bár mi nem tekintjük rugalmasnak a szemcséket, és nem tekintjük rugalmasnak a szemcsék közötti kapcsolatot sem.

A kontinuum kinematikájának új leírására tett kísérletet [Fülöp 2008]. A megközelítés egyik újdonsága, hogy az alakváltozást mint folyamatot értelmezi és az alakváltozási tenzor meghatározására egy differenciálegyenletet javasol.

Az izotrop kontinuumok anyagtörvényét [Ván és Asszonyi 2006 és 2008] fogalmazza meg úgy, hogy a kutatás során előtérbe helyezték a termodinamikai megközelítést. Ennek egyik következményeként nem alakváltozás-feszültség diagrammot, hanem alakváltozás-feszültség tartományokat nyernek. Ekkor jól értelmezhető a reverzibilitás és az irreverzibilitás, a rugalmas és a képlékeny alakváltozás zónája, valamint értelmezhető a törés is.

A jelen tanulmányban az anyagtörvényeket a folytonosság és a diszkrétség szerint fogjuk áttekinteni: milyen szerepe van a folytonosságnak és diszkrétségnek, összhangban van-e a fizikai viselkedés az alkalmazott matematikai modellel. Végül vizsgálat tárgyává tesszük az idő szerepét az anyagegyenletekben.

5.2 *A statikai határozottság és határozatlanság kérdése*

Az anyagegyenletek, vagy másképpen fogalmazva az anyagtörvények, alapvetően a belső erők és átrendeződések, illetve feszültségek és alakváltozások közötti kapcsolatokat adják meg. Ezek a kapcsolatok teszik lehetővé, hogy a probléma egyik oldalának ismeretében a másik oldalt is meghatározzuk. Triviális példa, hogy egy rudat, ha adott erővel húzzuk meg, akkor az anyagi viselkedés függvényében határozhatjuk meg a rúd alakváltozását. Fordítva, ha ismerjük a rúd alakváltozást (pontosabban annak történetét), akkor az anyagi viselkedés függvényében határozhatjuk meg, hogy milyen külső erők hatottak a rúdra és milyen belső erők – feszültségek – ébredtek benne.

A példa trivialitása egyrészt az egyszerű mechanikai állapot felvételéből, és abból tényből fakad, hogy a rendszer statikailag és kinematikailag határozott.

Az anyagegyenleteknek még egy fontos szerepük van: a statikailag határozatlan rendszerben lehetővé teszi az egyensúly meghatározását.

5.3 *Az anyagtörvényekről átrendeződés esetén*

A szemcsehalmazok vizsgálat során az alábbi feltevésekkel élünk:

- a szemcsék szigorúan konvexek – tehát a szemcse peremének, mint felületnek, a görbülete sehol sem tűnhet el, azaz a szemcse sem sík felülettel nem határolható, sem a felületén egyenes szakasz nem megengedett,
- a szemcsék abszolút merevek,
- a szemcsék szárazak, azaz nincs közöttük sem folyadék, sem ragasztó,
- két szemcse érintkezése során nem hatol egymásba,
- két szemcse között csak akkor lép fel belső erő, ha a szemcsék érintkeznek,
- a szemcsék érintkezési pontjaiban súrlódási erő nem ébred,
- a szemcsék érintkezési pontjaiban csak nyomóerő ébred,
- az érintkezési erő hatásvonala merőleges a két érintkező szemcse közös érintősíkjára,
- amennyiben a szemcsék érintkezése megszűnik, az érintkezési erő is megszűnik,
- a szemcsehalmaz a kezdeti állapotban egyensúlyban van, azaz minden szemcse egyensúlyban van,

– a szemcsék az egyensúly beálltához elmozdulnak egymáson, szükség szerint átrendeződnek,
– az egyensúly beállása során a szemcsék nem gyorsulnak,
– a szemcsék a rá ható erők hatása alatt nem törnek két vagy több darabba.

A feltevések kapcsán jelezzük, hogy ezeket, mármint a feltevéseket, a logikai érvelés során hol nyíltan, hol hallgatólagosan kihasználjuk. Megjegyezzük, hogy a feltevések többségét hallgatólagosan a folytonos közegek mechanikai viselkedése során is felhasználjuk, legfeljebb nem foglalkozunk azzal, hogy a levezetés egy-egy lépésénél valamilyen feltevéssel éltünk, többnyire nyilvánvalónak tartjuk. Természetesen a szemcsésségből adódó feltevések a folytonos modellre nem vonatkoznak, ott azzal analóg, a folytonosságra vonatkozó feltevések kerülnek – kellene kerülniük – előtérbe.

Az abszolút merevnek tekintett szemcsék esetén a rendszernek statikai szempontból való határozottsága követelményként fogalmazódik meg. Megjegyezzük, hogy még statikailag túlhatározott lehet a rendszer, bár ez többnyire együtt jár a kinematikai határozatlansággal. A továbbiakban megadjuk a hipotézis tartalmát.

A két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise: síkbeli szemcsehalmaz minden szemcséje két másik, a térbeli szemcsehalmaz minden szemcséje három másik szemcsére támaszkodik fel. A támaszok száma az átrendeződés során nem nőhet, megengedett, hogy csökkenjen.

A feltevésnek több következménye is van. Ezek a következők:

– egy síkbeli szemcsehalmazban egy szemcsére (legfeljebb) két másik, és egy térbeli szemcsehalmaz minden szemcséjére (legfeljebb) három másik támaszkodik fel (a kivételeket a szemcsehalmaz szabad peremén lévő szemcsék adják),
– közel azonos méretű szemcsékből korlátozás nélküli térfogatú szemcsehalmaz alkotható,
– egy térbeli irányban „rétegenként” csak növekedő vagy csökkenő nagyságú szemcsékből alkotott szemcsehalmaz abban az irányból korlátos lesz,
– gyakorlatilag csak véges számú szemcséből álló halmaz egyensúlyi helyzete határozható meg.

A feltevések és következményeik nem zárják ki, hogy

– a támaszok száma csökkenjen, hogy
– egy síkbeli szemcsehalmazban az egy szemcsével érintkező szemcsék száma hat, illetve, egy térbeli szemcsehalmaz az egy szemcsével érintkező szemcsék száma tizenkettő legyen.

Ez utóbbi kapcsán jelezzük, hogy pl. körök és gömbök esetén (könnyen) lehet ilyen elrendezést értelmezni. A két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise éppen azt mondja ki, hogy ilyen elrendezés nem jön létre, illetve ha létrejön, akkor a síkbeli szemcsehalmaz esetében kettő, a térbeli szemcsehalmaz esetében hat érintkezési pontban nem ébred belső erő. Szigorúan véve ebben az elrendezésben a szemcsék deformációja okán ébrednének ezekben az érintkezési pontokban is érintkezési erők, de éppen ez a hipotézisünk lényege, hogy ezekben az esetekben is eltekintünk ezektől az érintkezési erőktől. Okként, magyarázatként azt hozzuk fel, hogy a szemcsehalmaznak a szemcse alakváltozásából eredő méretváltozása töredéke a szemcsehalmaznak a szemcsék egymáson történő elmozdulásaiból, átrendeződéseiből eredő méretváltozásának. Amennyiben a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézisében foglaltaknál több érintkezési pont jön létre, és minden érintkezési pontban érintkezési erőt kívánunk értelmezni, akkor a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise nem teljesül és a szemcsehalmazt nem elegendő merev szemcsék halmazaként, hanem egyúttal kontinuum tulajdonságokkal is rendelkező deformálható szilárd szemcsék, esetleg deformálható kapcsolatokkal rendelkező merev vagy deformálható szemcsék halmazaként kell kezelni.

Megjegyezzük azt is, hogy jelentős számú szemcse esetén valamiféle kontinuális leírásmódra van szükség. Ebben az esetben a tömörödés változása és a törési, vagy inkább csúszási felületek kialakulása lesz az anyagegyenletek mechanikai tartalma.

A továbbiakban megvizsgáljuk az egyensúlyi és az anyagegyenleteket a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézisének teljesülése mellett. Úgy érvelünk, hogy a felül lévő szemcsék rátámaszkodnak az alul lévők szemcsékre. Ennek megfelelően egy szemcséhez viszonyítva a felette lévő „teherként” jelentkezik, az alatt lévő pedig „támaszként”. Ezt az ismeretlenek és azok meghatározására szolgáló egyenletek számának meghatározásánál vesszük figyelembe.

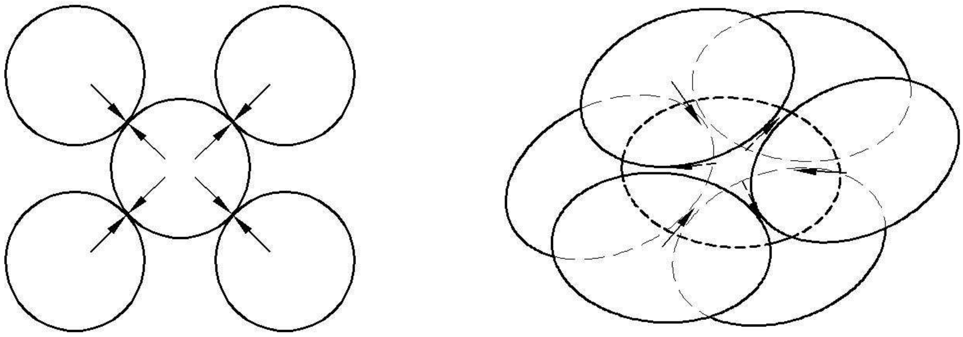
A vizsgálat tárgyává a „középen” elhelyezkedő szemcsét tesszük (12. ábra). Meghatározzuk az ismeretlenek számát és azokat az egyenleteket, amelyekkel az ismeretlenek meghatározhatók, vagy, ha úgy jobban testszik, azokat az egyenleteket, amelyeket az ismeretleneknek ki kell elégíteniük.

Az ismeretlenek

A vizsgált szemcse helye és helyzete. Síkbeli feladatban a súlypont két koordinátája és a főtehetetlenségi inerciatengelyek egy szögváltozója a kitüntetett koordinátarendszerben. Térbeli feladatok esetén a súlypont három koordinátája és a főtehetetlenségi inerciatengelyek három szögváltozója a kitüntetett koordinátarendszerben.

Az érintkezési pontok koordinátái. Síkbeli feladatban két pont, pontonként két koordináta. Térbeli feladatok esetén három pont, pontonként három koordináta.

Az érintkezési pontokban ébredő erők. Mivel a normálisok ismertek, ezért a belső erők iránya adott, mindösszesen egy skalár mennyiség – az erővektor nagyága – az ismeretlen. Síkbeli feladatban két vektor egy-egy abszolút értéke. Térbeli feladatok esetén három vektor egy-egy abszolút értéke.



12. ábra. A szemcsék elhelyezkedése a halmazban a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézisének teljesülése mellett

Az egyenletek

A támaszpontok koordinátái kielégítik a támaszt adó szemcse felületének egyenletét. Síkbeli feladatban mindkét érintkezési pont ad egy-egy egyenletet. Térbeli feladatok esetén mindhárom pont ad egy-egy egyenletet.

A támaszpontok koordinátái kielégítik a vizsgált szemcse felületének egyenletét. Síkbeli feladatban mindkét érintkezési pont ad egy-egy egyenletet. Térbeli feladatok esetén mindhárom pont ad egy-egy egyenletet.

A vizsgált szemcse normálisa az érintkezési pontokban egybeesik a támaszszemcse normálisával az érintkezési pontokban. Síkbeli feladatban mindkét érintkezési pontban ad egy-egy feltételt. Térbeli feladatok esetén mindhárom pont ad két-két feltételt.

Az egyensúlyi egyenletek. Síkbeli feladatban két skalár egyenlet az erőkre nézve és egy egyenlet a nyomatékokra nézve. Térbeli feladatok esetén mind az erőkre, mint a nyomatékokra nézve három-három skalár egyenlet.

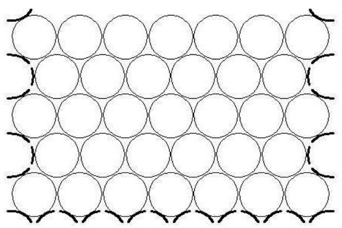
Az összesítést táblázatos formába adjuk meg.

1. Táblázat

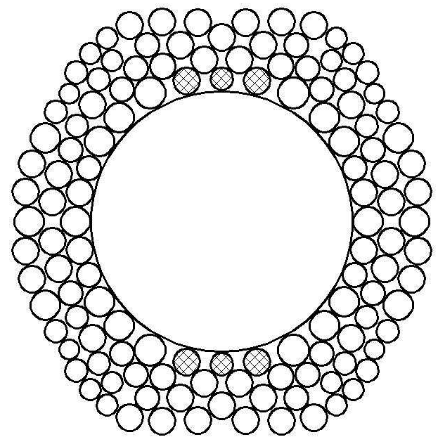
Ismeretlenek	Síkbeli	Térbeli
a szemcse helye helyzete	2 1	3 3
a támaszpont helye	2×2	3×3
az erők nagysága	2×1	3×1
Összesen	9	18
Egyenletek		
pont a támaszon	2×1	3×1
pont a szemcsén	2×1	3×1
a normálisok egybeesése	2×1	3×2
egyensúly erők nyomatékok	2 1	3 3
Összesen	9	18

A táblázatban szereplő számadatok igazolják, hogy a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise mellett a szemcsehalmazok statikailag határozott mechanikai rendszert alkotnak.

Megjegyezzük, hogy a szemcsehalmazra nézve néhány további feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a szemcsehalmaz valóban statikailag határozott legyen. Ez egyik, hogy a halmazra nézve periodikus peremfeltételeket adjuk meg (13. ábra). Másképpen fogalmazva, hogy a halmazok peremszemszéi is két, illetve három ponton támaszkodjanak fel. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az edénybe helyezett szemcsehalmaz esetén a peremfeltételek száma csökken, a halmaz kinematikailag határozatlan és statikailag túlhatározott lesz. A másik, hogy a szemcsehalmazban csak közel egyforma nagyságú szemcsék lehetnek: a sok kicsi szemcse egy nagy körül általában statikailag határozatlan halmazt eredményez. Megmutatható, hogy létezik olyan geometriai elrendezés, tehát olyan támaszrendszer, amely mellett a halmaz, mint mechanikai rendszer, statikailag határozott – érts: az ismeretlenek és egyenletek száma megegyezik. Formálisan a halmaz egy részén – többnyire a nagy szemcse maga – statikailag határozatlan – statikailag a megengedhetőnél több támasza van –, a másik részén túlhatározott – többnyire a nagy szemcsével egy-egy ponton érintkező kis szemcsékre gondolunk. A statikai határozatlanságot nem a nagy szemcse alakváltozásával oldjuk fel, hanem a nagy szemcse olyan geometriai elhelyezkedésével, amely során úgy fészkelődik be a nagy szemcse a kis szemcsék alkotta támaszokra, hogy az azokban ébredő erők éppen egyensúlyozzák a nagy szemcsére ható erőket (14. ábra).



13. ábra. Periodikus peremfeltételek és a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise



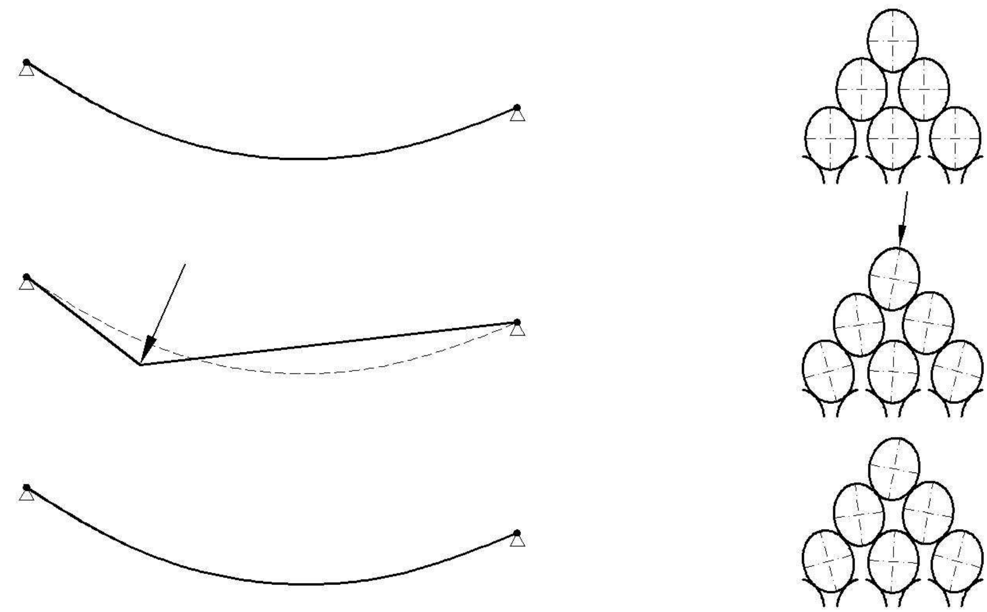
14. ábra. Egy nagy szemcse sok kis szemcse között és a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise

A két-, illetve a hárompontos feltámaszkodás hipotézisének a következménye az, hogy a szemcsehalmaz egy adott terhelés egyensúlyozására felveszi az adott terhelésnek megfelelő egyensúlyi elrendeződést. Következésképpen, minden terheléshez más és már egyensúlyi elrendeződés tartozik. Ebből a szempontból a szemcsehalmaz minőségileg tér el a szilárd testek rögzített pontokon kapcsolódó rendszerétől: egy kinematikailag határozott rendszerben a különböző terhek legfeljebb különböző alakváltozási formákat váltanak ki, de a rendszer elemeinek egymáshoz viszonyított helyzete nem változik meg. A kinematikai határozatlanságban a kötelekre és a kötélhálókra, illetve a rúdláncokra és rúdlánc-hálókra emlékeztet: azok is a terhelés függvényében veszik fel az egyensúlyi alakjukat (lásd a 15. ábrát). A kettő között mégis vagy egy lényeges különbség, példaként egy, a két végén felfüggesztett kötelet veszünk: a gravitációs térben a leterhelés után visszaáll a gravitációs térre jellemző egyensúlyi alak, a láncgörbe. A szemcsehalmaz leterhelés után többnyire nem változtatja meg az alakját, többnyire az adott tehernek megfelelő egyensúlyi elrendeződésben marad. Gondoljunk például arra, hogy egy cölöpöt belenyomtunk a homokba. Ha kivesszük a cölöpöt, akkor egy idő után a lyuk ugyan „begyógyul”, de nem az eredeti állapot áll helyre.

Ennek okán jelezzük, hogy talajt nem lehet rugalmas viselkedésű anyagnak tekinteni. Ennek fényében a rugalmas ágyazású gerenda, lemez kifejezés szakmai szempontból félrevezető, hibás.

Megjegyezzük, hogy a szemcsehalmaz az érintkezési rendszerével, a kinematikai és egyensúlyi egyenleteivel a rúdszerkezetekkel mutat strukturális hasonlóságot. Ennek a hasonlóságnak a részletes kimunkálása egy másik tanulmányra marad. Megjegyezzük, hogy ismertek a rúdszerkezeti analógia szerint kidolgozott numerikus modellek pl. [Bagi 2005].

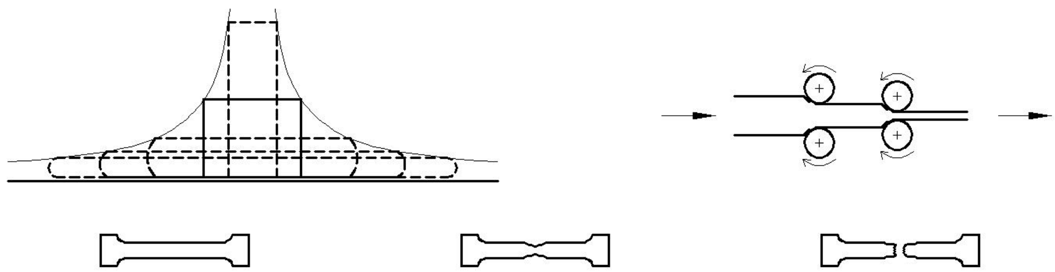
A szemcsehalmazban a két-, illetve a hárompontos feltámaszkodás hipotézisének teljesülése mellett anyagtörvényről nem beszélhetünk. Az anyagtörvény, mint az egyensúlyt kialakulását biztosító jelenség nem más, mint az, hogy a szemcsék addig forognak egymáson, míg a támaszpontokban olyan irányú erők ébrednek, hogy a szemcsék külön-külön egyensúlyozhatók legyenek. Ez első lésében azt jelenti, hogy egymáson fészkelődnek, a szomszédossági viszonyok nem változnak a meg. A második lépésben azt jelenti, hogy átrendeződnek, azaz a szomszédossági viszonyok is megváltoznak. Ennek során tömörödhet a szemcsehalmaz, de lazulhat is. A tömörödés végállapota a befeszülés, amikor már átrendeződésre nincs lehetőség. A lazulás végállapota a széthullás, amikor már átrendeződésre nincs lehetőség, mert a szemcsehalmaz elemeire hullott szét. A szemcsehalmaz egyedi tulajdonsága itt nyilvánul meg igazán: egy másik jellegű terhelés hatására a tömör szemcsehalmaz fellazulhat, az elemeire széthullott halmaz összeállhat újból halmazzá és betömörödhet.



15. ábra. A kinematikai határozatlanság kötélnél és szemcsehalmaznál

A tömörödés és a széthullás mellett említésre méltó átrendeződés a halmaz egy részének egy másik részén történő elcsúszása. Ezt szokás nyírásként, elnyíródásként értelmezni, hasonlóan a folytonos közegben lezajló jelenséghez. A szakkifejezést félrevezetőnek tartjuk. Példaként egy halomba rakott halmazt tekintünk, amelyet felülről növelünk szemcsék hozzáadásával. Időnként a halmaz egy-egy része lecsúszik a halmaz oldalán („lavinaképződés”), de ezt senki sem nevezné nyírásnak. Pedig a nyírásnak nevezett jelenség pont az imént említett csúszásból áll.

A továbbiakban más jellegű átrendeződéseket említünk meg. A példákat a fémek képlékeny megmunkálásból vesszük. A kiválasztott átrendeződések: zömítés, hengerlés és húzás. Ez utóbbi esetén a szakadást is ábrázoljuk sematikusan (16. ábra).



16. ábra. Átrendeződés: zömítés, hengerlés és húzás szakadással

5.4 *Az anyagtörvényekről alakváltozás esetén*

Az alakváltozásokat sajátosságaik alapján különítjük el. A tehermentesülés után az eredeti alakot visszanyerő anyag alakváltozása rugalmas, a maradó alakváltozást elszenvedő anyag alakváltozása képlékeny. A különböző idealizációnak megfelelően beszélünk ideálisan, vagy tökéletesen rugalmas, vagy képlékeny anyagról, rugalmas-képlékeny anyagról, a felkeményedés jelenségéről. A rugalmas, a képlékeny és a felkeményedő viselkedést jellemző szakaszokat egyenessel szokás közelíteni.

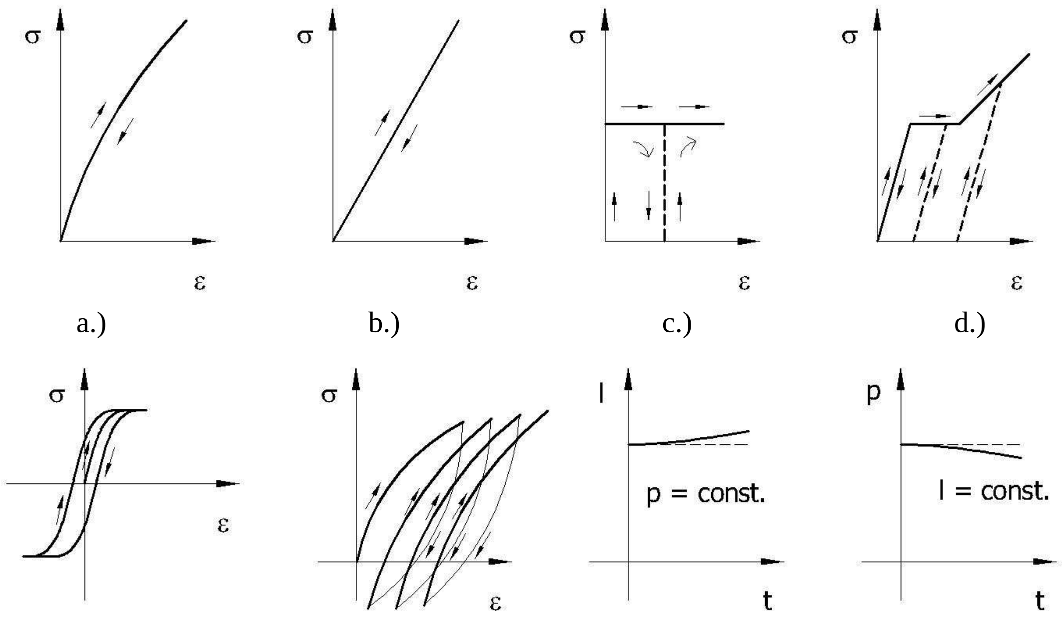
Az alakváltozások valójában nem ideálisak, ezért fellép(het) a hiszterézis jelensége mind a rugalmas, mind a képlékeny viselkedés esetében. Ezen kívül vannak időben lejátszódó alakváltozások, átrendeződések. Ilyen a kúszás (az erő értéke állandó, az alakváltozásé nő) és az ernyedés (az alakváltozás értékét rögzítve tartjuk, a belső erő értéke csökken.)

Az elmondottakat általában feszültség-alakváltozás vagy erő-nyúlás diagrammon szokás ábrázolni, lásd a 17. ábrát. A nyilak a felterhelés és a leterhelés során nyert ágakat jelzik.

Az alakváltozásoknak az időben történő lezajlása és az anyagot alkotó atomok (és/vagy molekulák) elrendezésének topológiai rendjének a megmaradása, illetve meg nem maradása között kapcsolat van.

Ugyanakkor mindkettőt tekinthetnők kísérleti tények is. Első pillanatra nézőpont kérdésének tűnik, hogy melyik állítást fogadjuk el kísérleti ténynek, és akkor a másik állítás az elfogatott, a „kísérleti tény” alapján „igazolható”. A szerző álláspontja szerint a fenomenológiai elméletben az alak megváltozásának a makroszkopikus észlelése során tett megállapítás, hogy az alakváltozás időben állandó, vagy változó, tekintendő kísérleti ténynek.

Az anyagot alkotó atomok (mechanikai szempontból való) oszthatatlanságából, valamint a gyakorlati összenyomhatatlanságából következik, de a fenti diagrammok alapján is világos, hogy az egyetlen olyan alakváltozás, amely a topológiai rend megtartása mellett megy – mehet – végbe, az a tökéletesen rugalmas alakváltozás. A többi alakváltozás során a topológiai rend nem marad meg. Jelezzük, hogy az átrendeződés és a topológiai rend megváltozása kifejezéseket egymás szinonimájaként alkalmazzuk.



a.) b.) c.) d.)

e.) f.) g.) h.)

17. ábra. Az alakváltozások grafikonjai:
a) tökéletesen rugalmas, b) lineárisan és tökéletesen rugalmas, c) merev és ideálisan képlékeny, d) lineárisan és tökéleten rugalmas ideálisan képlékeny ideálisan felkeményedő, e) rugalmas hiszterézis, f) képlékeny hiszterézis, g) lassú alakváltozás: kúszás, h) lassú alakváltozás: ernyedés

A rugalmas alakváltozást időben változatlannak tekintjük. Pontosabban, a felterhelés alatt, a felterhelés sebességével összhangban, időtől függően alakul ki a rugalmas alakváltozás, de rögzített teher mellett az alakváltozás nagysága már nem változik. A rögzített topológiai rend és az időben változatlan alakváltozás összhangban van.

Az időben lezajlódó alakváltozásokat úgy értelmezzük, hogy a testre rögzített értékű teher hat, vagy az alakváltozást valamely rögzített értéken tartjuk. Ez alapján kijelenthető, hogy az időben lezajló alakváltozás – az anyagot alkotó atomok már említett oszthatatlanságából, valamint a gyakorlati összenyomhatatlanságából következik, hogy – csak a topológiai rend megváltozásával, azaz az atomok átrendeződésével mehet végbe.

A képlékeny folyás – a neve is mutatja – időben lezajlódó folyamat. A képlékeny alakítás során, többek között, ezt ki is használjuk. Ugyanakkor a képlékeny alakítás során nem az egész test van képlékeny állapotban, hanem annak csak egy kicsiny része, ahol az alakító szerszámok létrehozzák a képlékeny folyáshoz szükséges feltételeket, majd éppen a folyás miatt az alakító szerszámból (henger, prés) kikerülő anyagrész egyúttal a képlékeny folyás feltételei közül is kikerül, viszont az alakító szerszám közé bekerülő anyagban egyúttal a képlékeny folyás feltételei is kialakulnak. Ezért a képlékeny alakítás során az alakítást elszenvedő test lépésről lépésre alakul át. Általában, a rugalmas-képlékeny viselkedésű testben a rá ható terhek hatására mind rugalmas, mind képlékeny zóna kialakul. Ugyanakkor a képlékeny folyás akkor és csak akkor alakulhat ki, ha a test egy teljes keresztmetszetében létrejön a képlékeny állapot (ráadásul homogén, hogy a mozgás végbemehessen), különben a rugalmas állapotban lévő rész – és időtől független alakváltozás – nem teszi lehetővé, hogy a képlékeny folyás végbemenjen. Gondoljunk például egy hajlított tartóra, amelynek a felső és alsó öve képlékeny állapotba kerül. A képlékeny folyás nem alakul ki, mert a gerinc annak rugalmas alakváltozása miatt a tartónak egy szilárd, merevnek tekinthető (gyakorlatilag nem deformálódó) „magját” alkotja.

A hiszterézist anyagszerkezetileg úgy értelmezzük, hogy az alakváltozásnak van olyan része, amely a tehermentesülés során rugalmasan megszűnik, de van olyan is, amely maradandó – képlékeny, átrendeződéssel végbemenő – alakváltozásként szenvedi el a test.

Az anyagtörvényt, az anyagi viselkedést – mint az fentebb oly sokszor megtettük – az anyag szerkezetének változásával igyekszünk „magyarázni”, vagy inkább szemléltetni. Egy adott anyagú test valamely adott terhelés és adott peremfeltétel melletti viselkedésének az előrejelzéséhez az anyagtörvényeket alakváltozás-feszültség függvénykapcsolat formájában kell tudni megfogalmazni. Ezzel szemben a kísérleti eredmények többnyire ponthalmazként, néhány esetben a szakítógép által rajzolt grafikonként állnak a rendelkezésünkre. Végül is peremérték-feladat megoldása során a kísérleti eredményeket valamilyen egyszerű matematikai függvénnyel közelítjük. Az ideális idealizáció az egyenessel való közelítés, ennek felel meg az ideálisan és lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny és a ideálisan és lineárisan felkeményedő viselkedés. A mért értékek valójában sosem esnek egy egyenesre. Akkor felvetődik az a kérdés, hogy vajon milyen függvénykapcsolatban van, milyen függvénykapcsolatban lehet a feszültség- és az alakváltozástenzor. Általánosságban nem lehet a kapcsolat jellegét megadni.

Szűkítve az általánosságot, tegyük fel, hogy a vizsgált anyag izotrop. Tegyük fel, hogy a függvénykapcsolat Taylor-sorba fejthető. Ekkor a tenzorokra vonatkozó Cayley–Hamilton-tétel értelmében elegendő a nulladik, első és második hatványt figyelembe venni, a magasabb hatványok ezekkel egyértelműen kifejezhetők. Ezen függvénykapcsolatok vizsgálata vezet az úgynevezett integrálhatósági feltételekhez. A problémát röviden vázoljuk, részletesebben lásd [Lámer 2007a és 2007c].

A feszültség- és alakváltozástenzorok között – homogén, izotrop anyagot feltételezve – a Cayley–Hamilton-tétel értelmében legfeljebb három független együttható állhat fenn. Egyfajta potencialitást – hipoelasztikusságot – feltételezve az együtthatók száma kettőre csökken. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy hipoelasztikusságot feltételezve az anyagi viselkedés lineáris, hipoelasztikusság nélkül pedig nemlineáris. Az integrálhatósági feltétel azzal a lehetőséggel kecsegtet, hogy kettő kontra három közötti „választás” tisztán matematikai alapon eldönthető. Mint arra az ETTE által kitűzött feladatára benyújtott pályaműből (lásd a fentebb hivatkozott művet) kiderül, az integrálhatósági feltételek nem alkalmasak a felvetett kérdést eldönteni: az integrálhatósági feltételekből az következik, hogy a megoldás struktúrája megegyezik a kiindulási egyenlet struktúrájával. Ezért a megoldandó feladat helyett egy azzal egyenértékűt kapunk. Az integrálhatósági feltételeket, [Gol’denblatt 1955 és 1969] után, az állapotérben kell integrálni azért, hogy a néhány ponton mért anyagállandók értékét az állapottér más pontjaira lehessen kiterjeszteni.

Végül röviden kitérünk néhány folytonosnak tekintett test anyagi összefüggéseire.

A tapasztalat alapján a gázokban, a folyadékokban végbemenő alakváltozások és átrendeződések, a folytonosnak tekintett szilárd testekben a „nagy rugalmas alakváltozás”, „folyás típusú alakváltozás”, valamint az „átrendeződéssel létrejött alakváltozás” újraépülő átrendeződéssel megy végbe.

A gázok esetében az anyagegyenlet a térfogat változására vonatkozik és azt a nyomás függvényében adja meg. (A hőmérséklet hatásától eltekintünk.) Ezt az egyenletet állapotegyenletnek szokás nevezni.

A folyadékok esetében, hasonlóan a gázokhoz, az anyagegyenletet egy állapotegyenlet formájában írjuk föl, amely a folyadék nyomását és a térfogatváltozását kapcsolja össze. (A hőmérséklet hatásától itt is eltekintünk.) Ugyanakkor a folyadékok gyakorlatilag összenyomhatatlanok. A fenti egyenletet nagysebességű áramlás esetén szükséges figyelembe venni.

A viszkózus folyadék és a rugalmas szilárd test egyenletrendszereiben a következő formában jelennek meg az anyagegyenletek. A viszkózus folyadék esetén a nyírófeszültségek és a nyírási alakváltozások között adunk meg anyagtörvényt, a rugalmas testek esetén a normálfeszültségek és nyúlások között is.

5.5 *Kitekintés a rácskontinuumok anyagi összefüggéseire*

A tanulmányban eleddig vagy folytonos vagy diszkrét rendszerekről esett szó. A folytonosságot és diszkrétséget a topológiai rend megmaradásával, illetve meg nem maradásával jellemezhetjük röviden. Mindemellett létezik olyan rendszer is, amelyben az atomi-molekuláris vagy annál nagyobb léptékű strukturális kialakítása alapján folytonosnak tekinthető – a struktúrában az atomok és/vagy molekulák, illetve az annál nagyobb léptékű struktúrában a rend megmarad –, de a viselkedésében vannak olyan elemek – a szomszédos elemek nem csak kollektíven, tehát azonos irányba mozdulnak el, hanem egyedien, egymásra is –, amelyek a diszkrét jelleget hangsúlyozzák. Ezek a rácskontinuumok.

A rácskontinuumok értelmezés szerint egy rácshálózat csomópontjaiban ülő diszkrét elemek halmaza, az egyes diszkrét elemeket meghatározott szerkezetek (keretek, rácshéjak, cellás szerkezetek) vagy erők (kristályrács) kötik egymáshoz. A rácskontinuumot az értelmezés során el kell látni anyagi összefüggésekkel: meg kell adni, hogy az egyes rácspontokban ülő részecskék hogyan kapcsolódnak a szomszédos, a másodszomszédos, netán az attól magasabb rendben szomszédos elemekkel. Ekkor a rácskontinuum anyagegyenletei levezethetők, pontosabban levezetendők: ahogyan a diszkrét rendszer folytonos leírására sorfejtést alkalmazunk, úgy a folytonos leírásban az anyagi összefüggéseket az eredeti, a diszkrét anyagi elrendezésre vonatkozó anyagi összefüggések sorba fejtéséből kapjuk meg. Megjegyezzük, hogy ez egyúttal lehetővé teszi, hogy a rácskontinuumok anyagi állandóit meghatározzuk. Megjegyezzük azt is, hogy ebből a szempontból a sok száz anyagi állandót nem kell kimérni, nem is lehet, hanem le kell vezetni (lásd [Kunyin, 1975], [Lámer, 1984a]).

6 ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmányban vizsgálat tárgyává tettük az anyagi viselkedés folytonos és diszkrét modellezésének kérdéseit. Ennek során áttekintettük az anyagi viselkedés három fő fogalom-csoportját: az átrendeződést és alakváltozást, a belső erőt és feszültséget, valamint a kettő közötti kapcsolatokat. Az áttekintés során mindig a fizikai jelenségből indultunk ki. Ezt követte a matematikai leírás egyes lépéseinek a jellemzése. Végül megvizsgáltuk, hogy a fizikai jelenség és matematikai modell milyen kapcsolatban áll egymással. A vizsgálódásokat általánosságban, kvalitatív jellemzésként végeztük: figyelmünket a topológiai rend megtartására, illetve meg nem tartására fordítottuk. Ennek kapcsán arra irányítottuk a figyelmet, hogy vajon az alkalmazott matematikai leírás összhangban van-e a topológiai viselkedéssel.

Mind a fizikai jelenségeknek, mind azok matematikai modelljeinek az ismertetése során több oldalról világítottuk meg a különbséget a diszkrét és a folytonos rendszer között.

A diszkrét rendszer – szemcsehalmazok – esetében bevezettük a kétpontos (síkbeli feladat), illetve a hárompontos (térbeli feladat) feltámaszkodás hipotézisét. Megmutattuk, hogy az így nyert rendszer statikailag határozott. Megadtuk azokat a feltevéseket, amelyek a szemcsehalmazoknak teljesíteniük kell ahhoz, hogy a két-, illetve a hárompontos feltámaszkodás hipotézisét bevezethessük. Megadtuk a hipotézis következményeit is.

A folytonos rendszer – deformálható szilárd test – esetében részletesen kitértünk az alakváltozás matematikai modelljére: az alakváltozás a testben beírható összes folytonos görbe relatív megnyúlásával értelmeztük. Megmutattuk, hogy ebből értelmezhető az alakváltozás lokálisan. Megmutattuk azt is, hogy a fenti definíció automatikusan választja szét a folytonos alakváltozást az átrendeződéstől.

Röviden kitértünk a rácskontinuumok anyagi összefüggéseire is. Rámutattunk arra, hogy az abban szereplő anyagi állandókat nem kimérni kell, hanem az anyagi rendszer értelmezésénél megadott nemlokális kapcsolatok anyagi állandóiból kell a folytonos modellre való áttérés során levezetni.

IRODALOM

Bagi K. 1996. Stress and strain is granular assembles. *Mech. Mater*. **22**.(3): 165-177

Bagi K. 2005. *Szemcsehalmazok mikroszerkezetének vizsgálata.* Akadémiai Doktori Ért. (Kézirat), Bp.

Bell F.A. 1973. *The Experimental Foundations of solid Mechanics.* Encyclopaedia of Physics.. **VIa**/1. Springer

Budó Á. 1972. *Mechanika.* Tankönyvkiadó, Budapest. (Ötödik kiadás.)

Capriz G. Giovine P. Mariano P.M. (Eds.) 2008: *Mathematical models of Granular Matter.* Springer-V. 212 p.

Capriz G.; Mariano, P.M. (ed.), 2007. *Material Substructures in Complex Bodies.* Elsevier.

Duran J. 2000. *Sand, Powders and Grains. An Introduction to the Physics of Granular Materials.* Springer 214

Eringen A.C. 1970. *Foundations of Micropolar Thermoelasticity.* Springer, Wien – New York

Eringen A.C. 1998. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids.* Springer, New York.

Fülöp T. 2008. *Kontinuumok kinematikájának új értelmezése*; In: Új eredmények a kontinuumfizikában. Szerk. Fülöp T (Mg-Km 8). pp. 55-99., Műegyetemi Kiadó, Budapest

Гольденблат И.И. 1955. *Некоторые вопросы механики деформируемых сред.* ГИТТЛ, Москва

Гольденблат И.И. 1969. *Нелинейые проблемы теория упругости.* Наука, Москва

Guyer R.A.; Johson P.A., 2009. *Nonlinear Mesoscopic Elasticity.* Wiley VCH Verlag, Weinheim

Herrmann H.J.; Hovi J.-P.; Lidung S. (Eds), 1998. *Physics of Dry Granular Media.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London, 711 pp.

Kolymbas D. (Ed.), 2000. *Constitutive Modelling of Granular Materials.* Springer-Verlag, 554 pp.

Komornik V., 2003. *Valós analízis előadások.* I.-II. Typotex, Budapest

Кунин И. А. 1975. *Теория упругих сред с микроструктурой.* Наука, Москва

Korn G.A.; Korn T.M. 1975. *Matematikai kézikönyv műszakiaknak.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Кутилин Д.И. 1947. *Теория конечных деформаций.* Огиз-Гостехиздат, Москва-Ленинград
Lámer G. 1984a. Contradictions in the Theory of Micropolar Elasticity and Their Causes *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, **II** (1): 12-16
Lámer G. 1984b. Differential Geometry, as Mathematical Background of Continuum Physics. *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, **II** (3): 17-21
Lámer G. 1985a. On Continuous and Discrete Mechanical Systems. *Newsletter*, Techn. Univ. Bp., **III**(3): 12-15
Lámer G., 1985b. Notes on the theory of large displacement with small strain. *Periodica Politechnica* **29** (1-2): 53-65
Lámer G. 1989. A nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikája. *Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában.* II. Tudományos Találkozó. Előadások kivonatai, Budapest **I**: 85-88.
Lámer G. 1990. *A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulásokat végző tökéletesen rugalmas héjak és rudak elméleteinek matematikai alapjai.* Kandidátusi értekezés. (Kézirat) Budapest
Lámer G. 1992. A kis alakváltozások és a nagy elmozdulások geometriai kapcsolatáról. *Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában.* III. Tudományos Találkozó. Előadások kivonatai, Bp. pp. 49-51
Lámer G. 1992-93. A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikájáról. *Építés-, Építészettudomány* **XXIII** (1-2): 35-59
Lámer G. 1994. Folytonos és diszkrét modellek a kontinuummechanikában és a termodinamikában. In: *Termodinamikai előadások.* Szerk.: Lámer G., Eötvös L. Fiz. Társ., Budapest, pp. 76-81
Lámer G., 2000. Kinematikai szabadságfokok a klasszikus és az általánosított kontinuumokban; http://www.me.bme.hu/esemenyek/szilszem/lamer.html, 2001.; Abstract: Mechanics of Solids.
Lámer G. 2003a. Solid and soft body with and without structure. In: *Quasi-static deformations of particular materials.* Proc. QuaDMP'03 Workshop. Ed.: K. Bagi. pp. 159-166.
Lámer G. 2003b. Large deformations: boundaries and possibilities in the mathematical descriptions = In: *Prediction and Simulation Methods in Geomechanics.* Proceedings of the International Workshop. Ed.: F. Oka, I. Vardoulakis, A. Murakami & T. Kodaka. Technical comitte 34. of ISSMGE, Athens pp. 117-120.
Lámer G. 2006a. *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései*. In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konf.. Szerk.: Török Á., Vásárhelyi B., Műegyetemi K., Bp,. [Mg-Km 2.]: 145-156.
Lámer G. 2006b. Symmetry and Asymmetry, or Regularity and Irregularity in the Force Distribution in the Heaped Bodies. *Culture and Science.* Ed.: Darvas Gy. **17**: 221-233
Lámer G. 2007/a. Az integrálhatósági feltételekről az izortop, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve. Pályamű (Kézirat), Budapest (Lásd az ETTE honlapján)
Lámer G. 2007/b. *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései*. In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konferencia. Szerk.: Török Á.; Vásárhelyi B., Műegyetemi K., Bp, [Mg-Km 4]: 301-314
Lámer G. 2007/c. Az integrálhatósági feltételekről. In: Mérnökgeológia-Kőzetmechanika. Konferencia Szerk.: Török Á.; Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. [Mg-Km 4]: 315-326
Lámer G., 2008. *Száraz, vizes, kötött szemcsék és a folytonos közeg, avagy a szemcsétől kontinuumig*. Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Konf.. Szerk.: Török Á.; Vásárhelyi B., Műegyetemi K. Bp. [Mg-Km 7]: 271-286
Love A.E.H. 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4. ed. Cambridge, Univ. Press
Лурье, А.И., 1970. *Теория упругости.* Наука, Москва,
Matolcsi T. 1992. Dynamical Laws in Thermodynamics. *Physics Essays*. **5**(3): 320-327
Nedderman, R.M.: *Statics and Kinematics of Granular Material*s. Cambridge Univ. Press, 1992. (2005.) 352 p.
Новожилов В.В. 1948. *Основы нелиней теории упругости.* Огиз-Гостехиздат, Москва
Постников М.М. 1989, 1988. *Лекции по геометрии.* Т. III. *Гладкие многообразие.* Т. IV. *Дифференциалная геометрия*. Наука, Москва
Папкович П.Ф. 1939.*Теория упругости*. ОБОРОНГИЗ, Ленинград- Москва
Revuzhenko A.F. 2006. *Mechanics of Granural Media.* Springer-Verlag, Berlin etc.
Ristow G.H. 2000. *Pattern formation in Granural Materials.* Springer-Verlag, Berlin etc.
Tonti E. 1976 „The Reason for analogies Between Physical Theories" *App. Math. Modelling*, **1**: 37-50.
Truesdell C.; Noll W. 1965. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics.* Encyclopaedia of Physics. Ed. by S. Flügge.. **III**(3). Springer.
Ván P., 1995. Other Dynamic Laws in Thermodynamics. *Physics Essays*. **8**(4): 457-465
Ván P.; Asszonyi Cs., 2006. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye II. Az általános törvényszerűségek. In: *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*. Szerk. Asszonyi Cs. [Mg-Km 3]. 25-87., Műegyetemi Kiadó, Bp.
Ván P.; Asszonyi Cs., 2008. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. In: *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai.* Szerk. Asszonyi Cs. [Mg-Km 6]. pp. 13-50, Műegyetemi Kiadó, Budapest
Ván P.; Berezovszki, A.; Engelbrecht, J. 2008. Internal Variables and Dynamic Degrees of Freedom. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **33**: 235-254.
Verhás J. 1985. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, pp.300
Verhás J. 1989. An Application of Gyarmati's Wave Approach. *Acta Physica Hungarica* **66**.(1):95-97.