Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2008 (Szerk: Török Á. & Vásárhelyi B.) oldalszámok: 271-286

Száraz, vizes, kötött szemcsék és a folytonos közeg, avagy a szemcsétől a kontinuumig

Lámer Géza

Debreceni Egyetem, AMTC MK, Építészmérnöki Tanszék, Lámer & Lámer Kft.,

e-mail: lamer@emma.hu

ÖSSZEFOGLALÁS: Az előadásban a talajok modellezésével foglakozunk. Közismert, hogy a talaj alapvetően szemcsés szerkezetű, és az is, hogy a talajban kialakuló feszültségi és alakváltozási állapotot többnyire folytonos modellel írjuk le. Ezért megvizsgáljuk a szemcsés és a folytonos közeg viselkedését, és azt is, hogy hogyan válhat a szemcsés közeg folytonossá.

Kulcsszavak: szemcsehalmaz, száraz, vizes és között szemcsehalmaz, szemcsés közeg, folytonos közeg, a szemcsehalmaz és a kontinuum mechanikája

1 BEVEZETÉS

A talajok és a kőzetek egy jelentős része nem folytonos: a belső szerkezetét tekintve egymástól jól elkülöníthető részekből – a talajok szemcsékből, a kőzetek tömbökből – állnak. Mégis, mérnöki szempontból a vizsgálat tárgyává tett talaj- vagy kőzetrész térfogata olyan nagy az egyes, azon belül elkülöníthető részekhez képest, hogy a vizsgálat eszközeként a folytonos matematikát, azaz a differenciál- és az integrálszámítást alkalmazzuk. Ennek egyik velejárója, hogy magát a talajt és a kőzetet egyaránt – legalábbis hallgatólagosan – folytonos közegnek, azaz kontinuumnak tekintjük. Általában ennek a hallgatólagos feltételezésnek többnyire nem vagyunk a tudatában, és – talán éppen e miatt – többnyire figyelmen kívül hagyjuk a kétféle anyagi rendszer – a szemcsék halmaza és a folytonos közeg – különbözőségéből eredő eltérő viselkedést.

Az előadásban a szemcsék halmaza és a folytonos közeg különbözőségéből eredő eltérő viselkedéseket tesszük a vizsgálat tárgyává. Ennek során áttekintjük a diszkrét és a folytonos közeghez kapcsolható fizikai és matematikai fogalmakat, az anyagi testek viselkedésének a csoportosítását a halmazállapotok, és a külső erők hatása alatt végbemenő deformáció szerint, a halmazok és a kontinuum erőjátékát és alakváltozását. Végül megvizsgáljuk annak útját-módját, ahogyan egy szemcsehalmaz folytonos közeggé válthat: egyrészt a víz, vagy egy „ragasztó" a szemcséket egybeforrasztja, másrészt a szemcsehalmaz összetömörödése következtében, a halmaz befeszülése útján.

Végezetül jelezzük, hogy figyelmünket elsősorban a szemcsék halmaza felé fordítjuk, és a vetőkkel és törések felszabdalt kőzettömbök viselkedésének leírása a vizsgálataink során kissé a hátérbe szorul.

2 A DISZKRÉT ÉS A FOLYTONOS: FIZIKAI ÉS MATEMATIKAI FOGALMAK

Az egyes testek diszkrét, illetve folytonos rendszerként való értelmezéséhez mind a fizika, mind a matematika szemszögéből át kell tekinteni a diszkrét és a folytonos fogalmakat.

2.1 *Fizikai fogalmak*

Először néhány példát tekintünk.

A szemmel szétválasztható, néhány részből álló rendszer diszkrét rendszerként viselkedik. A Naprendszer, általában a bolygórendszerek. A néhány szilárd testből alkotott rendszer, mint például testek egy lejtőn, vagy néhány rúdból álló mechanizmus, illetve rácsos szerkezet. Ide soroljuk a néhánytól, a néhány száz vagy ezer szemcséig terjedő szemcsehalmazokat is. Meggyőződésünk szerint ide tartozik a

Szahara homoktengere is, bár nem sok esélye van annak, hogy kézzel (?), vagy géppel végigszámoljunk egy szellő után kialakult homokdűne helyét ***és*** alakját.

Az igen apró méretű, elsősorban a molekuláris mérettartományba eső, nagyszámú részből álló rendszer folytonos rendszerként viselkedik. Folyadékok folyása, vagy rugalmas testek alakváltozása. Hullámok terjedése folytonosnak tekintett közegekben, vagy a vákuumban.

Az igen apró méretű, elsősorban a molekuláris mérettartományba eső, nagyszámú részből álló rendszer mutathat diszkrét viselkedési mintát is, azaz, amikor az egyes részek „önálló" viselkedése a döntő. A kvantummechanikai rendszerek diszkrét viselkedésűek.

Egyes rendszerek egyszerre mutatnak diszkrét és folytonos viselkedési mintázatot is: a rácskontinuum – egy szabályos rács rácspontjaiban ülő, illetve a körül mozgó-rezgő részecskék összessége – rezgései között vannak diszkrét, vannak folytonos, és értelemszerűen vannak átmeneti formák is.

Fizikailag diszkrétként viselkedik az a rendszer, amelyben annak egyes komponensei egymástól lényegesen eltérő mozgást mutatnak föl: például külső erő hatására helyet cserélnek, vagy egymással szemben mozognak.

Fizikailag folytonosként viselkedik az a rendszer, amelyben annak egyes egymáshoz közel fekvő pontjai közel azonos mozgást mutatnak föl, továbbá, minél közelebb fekszenek egymáshoz a pontok, annál közelebb fekszenek egymáshoz a mozgások.

2.2 *Matematikai fogalmak*

A diszkrét és a folytonos fogalmak a matematikában a következők.

Diszkrét: a véges, a megszámlálható. Ez vonatkozhat magára halmazra – halmaz alatt itt nem feltétlen a szemcsehalmazt, hanem matematikai értelemben vett halmazokat, azaz elemek összességét értjük –, és vonatkozhat a halmaz elemeinek megváltozására is. Ez utóbbi alatt érthetjük a halmaz elemeinek a térben elfoglalt helyzetét, a halmazban elfoglalt helyét, vagy bármi más fizikai állapotjellemzőjét (mint például sebesség, elektromos töltés, hőmérséklet, stb.), matematikai szempontból a halmaz leképezését egy másik halmazra.

Folytonos: a vizsgált halmaz elemei között egy – folytonosságnak nevezett – kapcsolat mutatható ki. A folytonosságot nem magára a halmazra, hanem egy halmaznak egy másik halmazra való leképezésére értelmezzük. A folytonos leképezést a metrikus terekben úgy értelmezzük, hogy az egymáshoz közel fekvő pontok képei is közel fekszenek egymáshoz. A topológiában a folytonosságot torlódással, a határ(átmenet) fogalmával értelmezzük. Ennek alapja a környezet, azaz a pontoknak az egymáshoz való viszonya: a pont környezete az a részhalmaz, amely tartalmazza a pontot. A környezet nem csak a tartalmazást, de a szétválasztás lehetőségét is magába foglalja: az egyes pontok elkülönülnek – szétválaszthatók –, ha vannak az egyes pontoknak egymástól független (metszetük üres) környezetei. Az egyértelmű határátmenet fogalmához szükséges a szétválaszthatóság, ellenkező esetben egy sorozatnak két határpontja, két torlódási pontja lehet. A határátmenet létezéséhez viszont legalább megszámlálható sok pontra (ezzel együtt környezetre) van szükség. A folytonosság, amelyet a leképezésre értelmezünk, erős megszorítást tesz arra a halmazra nézve, amelynek a leképezését vizsgáljuk.

A diszkrét fogalmának a vizsgálatánál diszkrét maga a halmaz, amelyet leképezünk. Ezzel szemben a leképezés lehet diszkrét is, és folytonos is: szemcsék keverése egy dobozban diszkét, de a szemcsék mozgása lehet folytonos is. (Ez utóbbira jó példa egy bolygó mozgása egy naprendszerben.) A folytonosságot a leképezésre értelmezzük. Ennek kapcsán felvethető az a kérdést, hogy vajon a halmazra nézve értelmezhető-e valamilyen, a folytonossággal analóg fogalom. A válasz az, hogy több, ezzel analóg fogalom is értelmezhető. Ilyen a halmaz összefüggősége (nem esik szét több, független – mondhatnók diszkrét – részre), sűrűsége (egy részhalmaznak kellően sok eleme van az egész halmazra nézve), kompaktsága (a tér lefedhető végesen sok részhalmazzal; a nem megszámlálható halmazok esetében, mint például a valós számok halmaza, kiemelkedő fontosságú fogalom), teljessége (minden sorozatnak van határértéke).

A ponthalmazok esetében értelmezzük a kontinuumot, mint olyan halmazt, amely kompakt és összefüggő. Legalább két pontja van, de ezeknek az egyik folyománya, hogy végtelen sok pontja van. A valós számok halmaza egy egydimenziós kontinuum, ezzel analóg módon, valós számok halmazának direkt szorzataként értelmezett két- és háromdimenziós ponthalmazok a két-, illetve háromdimenziós kontinuumok. Végül megemlítjük, hogy ívszerűen összefüggő tulajdonság teszi lehetővé az egyenes vonal (a „számegyenes", mint „prototípus") leképezését ponthalmazokba, ezzel együtt a koordinátavonalak értelmezését halmazokban.

A diszkrét és a folytonos fogalom kapcsán néhány megjegyzést teszünk. A diszkrét ellentétje – legalábbis a hétköznapi szóhasználat szerint – a folytonos. Matematikai szempontból ponthalmazokra nézve több fogalom létezik, mint a nem diszkrét, ahogyan azt fentebb említettük, az összefüggőség, a kompaktság, a sűrűség, a teljesség. A nem folytonos nem feltételen diszkrét, lehet szakadásos is egy-egy pontban. Ennek megfelelően a folytonosság fogalmát sok szempontból részletezték, finomították. A függvényanalízisben beszélünk egy- és kétoldali, valamint egyenletes folytonosságról, beszélünk összefüggő és nem összefüggő halmazokról, beszélünk ívszerűen összefüggő halmazokról, stb. A folytonosság alatt hallgatólagosan – egyes matematikai felfogás szerint pedig ez a *folytonos matematika* definíciója – azt értjük, hogy a differenciál- és integrálszámítás alkalmazható. Itt említjük meg, hogy ez a párosítás többet követel meg, mint magát a folytonosságot, továbbá egy integrálható függvény nem feltétlen differenciálható. Megemlítjük azt is, hogy értelmezzük a megszüntethető szakadás fogalmát azért, hogy a differenciál- és integrálszámítást a nem mindenütt folytonos függvényre is alkalmazhassuk.

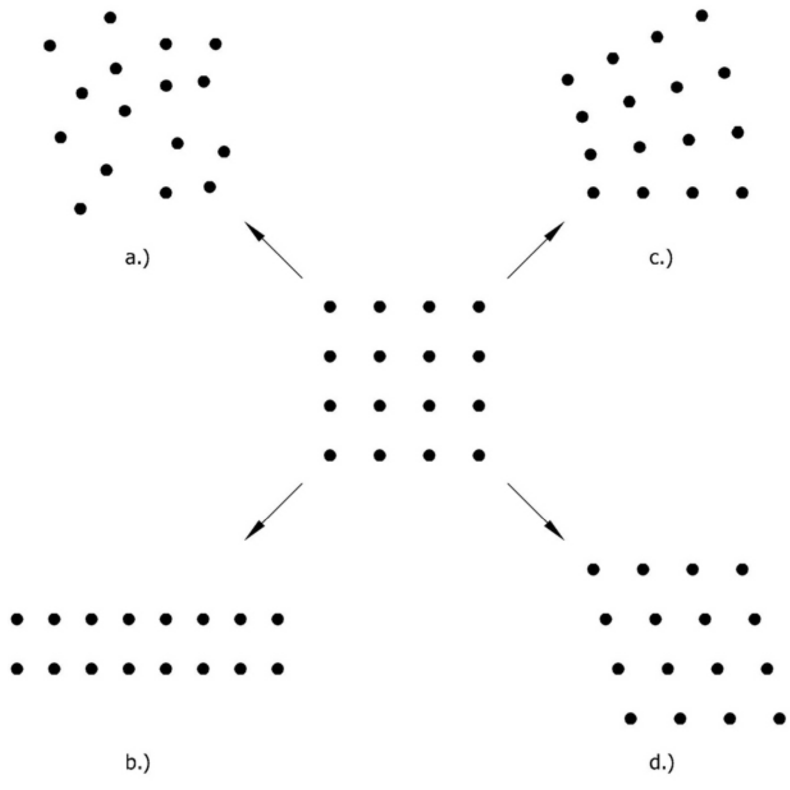
3 AZ ANYAGI TESTEK JELLEMZÉSE: DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS VISELKEDÉSŰ STRUKTÚRÁK

Áttekintjük a fogalmakat, és röviden csoportosítjuk az anyagokat struktúrájuk és viselkedésük szerint.

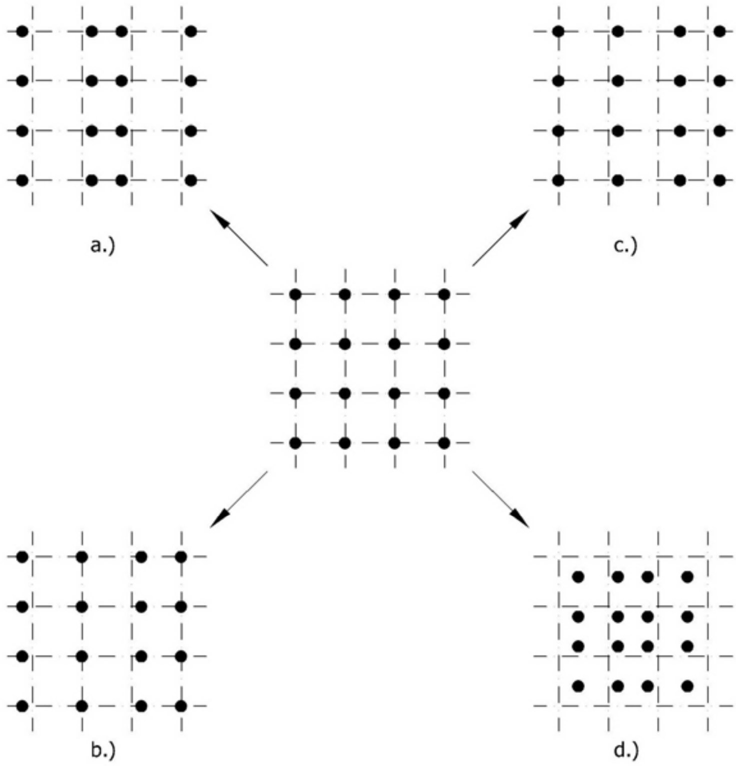
3.1 *Fogalmak*

A kétféle, tehát a fizikai és a matematikai fogalmak áttekintése után megvizsgáljuk, hogy az anyag, amely rendelkezik az atomi-molekuláris strukturáltsággal, diszkrétnek, vagy valamilyen értelemben folytonosnak tekintendő. Az világos, hogy az anyag esetén a folytonosságot körültekintően kell megfogalmazni, hiszen a folytonosságot a matematikában a leképezésre és nem magára a (leképezés tárgyává tett) halmazra értelmezzük. Az is világos, hogy a matematikai értelemben vett kontinuum az anyagra csak modellként alkalmazható, amennyiben az anyag véges sok atomból és/vagy molekulából áll, míg a matematikai kontinuum megszámlálhatatlan (kontinuumszámosságú) sok pontból áll.

Az anyag diszkét és folytonos voltát, valamint az anyag diszkrét és folytonos viselkedését a topológia eszközeivel fogalmazzuk meg. Az elsőnél a választóvonal a struktúra megmaradása, a másodiknál a kollektív viselkedés, vagyis az azonos, vagy legalábbis a közel azonos viselkedés. A struktúra megmaradása alatt azt fogjuk érteni, hogy az anyagot alkotó atomok és/vagy molekulák sorrendje, egymásutánisága változatlan. Azaz diszkrét az az anyag, amelyben a struktúra nem marad meg, és folytonos, amelyben megmarad.



1. **ábra**: a: keverő leképezés; b: képlékeny folyás; c: hajlítás; d: nyírás



2. **ábra**: a: optikai rezgés, első ág; b: optikai rezgés, második ág; c: longitudinális rezgés; d: térfogati rezgés

Az azonos viselkedés alatt azt fogjuk érteni, hogy ha ismert egy atom vagy molekula viselkedése, akkor annak egy közvetlen szomszédságában lévő atom vagy molekula viselkedését az első atom vagy molekula viselkedése alapján egyértelműen, a kettejük közötti távolságnak megfelelő pontossággal meg lehet határozni. Matematikai szempontból a struktúra megmaradása azt jelenti, hogy értelmezzük az atomok és/vagy molekulák környezeti rendszerét (topológiáját), egymásutániságát (koordinátarendszerét), és ez a környezeti rendszer, ez az egymásutániság nem változik meg. A kollektív viselkedés alatt azt fogjuk érteni, hogy a leképezés folytonosnak tekinthető a topológia (a metrika) szempontjából: a topológiai (vagy metrikus) értelemben közel lévő pontok a leképezés – azaz a mozgás – után topológiai (vagy metrikus) értelemben továbbra is közeliek maradnak. Tehát diszkrét az a leképezés, amely során nem lehet kollektív viselkedést kimutatni, és fordítva, ahol lehet, az a folytonos leképezés.

3.2 *Anyagok és viselkedések*

Az anyagokat – jobb híján – a halmazállapot alapján csoportosítjuk, illetve ezt kiegészítjük a szemcsehalmazokkal.

Gáz

Az anyag struktúrája diszkrét, hiszen a gázt alkotó egyes atomok és/vagy molekulák folytonosan helyet cserélnek. A gáz viselkedése lehet folytonos, és lehet diszkrét is. A lamináris áramlást folytonosnak, a turbulens áramlást diszkrétnek tekinthetjük. Mindemellett hangsúlyozni kell, hogy a lamináris áramlásban is fellépnek diszkrétséget visszatükröző jelenségek, azaz az egymás mellett, mintegy egymástól függetlenül áramló rétegek között az atomok és/vagy molekulák helyet cserélnek, ez egyúttal az atomi-molekuláris magyarázata a belső súrlódásnak.

A gáz minden irányban szétterjed. Zárt edényben lévő gáz egyensúlyban van, így benne állandó nyomásviszonyok uralkodnak. A gázt mozgásba nyomáskülönbség hozza. Nagy léptékben – mint például a földi légkör – a sűrűsége, és ezzel együtt nyomása is változik. Sűrű gáz gravitációs környezetben folyadékként viselkedhet: nem minden irányban terjed szét, hanem lefelé törekszik. Ha edényben van, akkor annak alsó pontja felé folyik.

A gáz összenyomható, jelentős mértékben tömöríthető.

Folyadék

A folyadék mind a struktúráját, mind a mozgását tekintve hasonlóan viselkedik a gázhoz. A különbség abban van, hogy a folyadékok esetén a folyadékot alkotó atomok és/vagy molekulák folytonos érintkezésben vannak. Az áramlás lamináris, vagy turbulens módjára, a belső súrlódásra vonatkozó megállapítások megegyeznek a gázoknál tettel.

A folyadék a gravitáció hatására folyik, azaz az edény alsó pontján gyűlik össze. A folyadékban már kisebb léptékben is változik a gravitáció irányában a nyomás (a sűrűség változása elenyésző, lásd a következő bekezdést), míg a gravitáció irányára merőleges felületek (kis léptékben síkok) mentén a nyomás állandó.

A folyadékok gyakorlatilag nem nyomhatók össze. Az összenyomhatóság igen kis mértékű, néhány (térfogat) ezrelék, vagy tízezrelék.

A folyadékok a gázokhoz viszonyítva több, eltérő tulajdonsággal rendelkezhetnek. Ezek a következők.

A folyadékban az azt alkotó részek folytonos érintkezése egy, a gáztól eltérő jelenséget hoz létre: ez az, hogy a folyadékot alkotó két részecske egymáson való elmozdulása – legyen az csúszás vagy gördülés – önmagában előidézheti a belső súrlódást. Ez az a jelenség, amit viszkozitásnak nevezünk. A viszkozitás nélküli víz a „száraz” víz, a kismértékben viszkózus víz a „nedves” víz. A jelentős viszkozitással rendelkező folyadékok a viszkóz folyadékok, mint például az olaj, a besűrűsödő zsír, a híg méz, a megolvadt kátrány, a meszes, gipszes, vagy cementes habarcs. Az igen sűrű folyadékok már masszaként viselkednek: nem csak folynak, hanem gyúrhatóak, mint például a szaggatás előtt álló tészta, a fazekasok agyaga, a sűrű méz, a kötés előtti habarcsok.

A folyadékot alkotó molekulák, mint elektromágneses rendszerek, rendelkezhetnek polaritással, ezzel együtt a molekulákat többnyire már nem gömbölyűnek, hanem ellipszoidnak szokás tekinteni. Ekkor egyrészt a folyadék részecskéinek a mozgását kiválthatja az elektromágneses tér változása is, másrészt a gömbtől eltérő alak és a polarizációs irány megváltozása a molekulák átrendeződését idézheti elő.

A folyadékot alkotó molekulák közötti érintkezés hozhat létre olyan jellegű belső erőt, amely a folyadéksugarat összetartja, illetve nem túl hosszú folyadéksugár esetén a sugarat mintegy visszaszívhatja a tartályban lévő folyadékhoz. Ez a rugalmas folyadék: a sugár rugalmasan hajlik, csavarodik és görbül, mígnem nagyobb mennyiségben már folyadékként viselkedik; vagy a kiöntött folyadéksugarat elvágva az elvágott sugár mintegy visszaugrik a kiöntő edénybe. (Megjegyezzük, hogy a „visszaszíváskor" a folyadék az edényben oly mértékig rugalmasan viselkedik, hogy megszűnik a folyadék vízszintje, néhol még az edénytől el is válik: a folyadék szinte szilárd testként, azon belül rugalmas masszaként, végül viszkóz folyadékként viselkedik.)

Szilárd test

A szilárd test struktúrája folytonos. A viselkedését tekintve lehet diszkrét, folytonos, sőt folyhat, mint a folyadék. Jellemzője az, hogy a gravitáció alatt alakját megtartja. Szűkebb értelemben véve azt tekintjük szilárdnak, amely a terhelés hatására is megtartja alakját, vagy legalábbis a deformáció közben is felismerhető alakja, azaz sem az euklideszi geometria, sem a metrika értelmében nem változik meg, legfeljebb kissé meggörbül, míg a terhelés megszűnte után visszanyeri az eredeti alakját.

A szilárd test diszkrét viselkedésére példa a kristályrácsok optikai rezgése.

A sziládt test folytonos viselkedésére példa a szilárd testek kismértékű rugalmas alakváltozása.

A gumi nagymértékű rugalmas alakváltozása részben folytonos, részben diszkrét. A gumit alkotó hosszúszálú, feltekeredett molekulák másodlagos kapcsolatai felbomlanak a külső erő hatására, és az új deformált helyzetben az egyes hosszúszálú molekulák között más pontokban jönnek létre a másodlagos kapcsolatok, míg az elsődleges kapcsolatokban olyan mértékű belső erő lép fel (vagy az elsődleges kapcsolatokban olyan rugalmas energia halmozódik fel), amely a külső erő megszűnte után képes a deformáció után kialakult másodlagos kapcsolatokat felbontani és az eredeti állapotot visszaállítani. Ennek során bizonyos vázmolekulákban a váz mentén a belső struktúra megmarad, de az egyes vázmolekulák közötti kapcsolatok megváltoznak. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a vázmolekulákon belül folytonos a test, de az egyes vázmolekulák egymáshoz viszonyítva diszkrét mozgásokat is végezhetnek.

A szilárd test folyására példa a fémek képlékeny alakváltozása: húzás, hengerlés, zömítés. A szilárd test folyását nem tekintjük folytonos viselkedésnek; az anyag belső szerkezete megváltozik: az atomok egy része más környezetbe kerül. Vannak olyan fémek, amelyeknek a képlékeny alakváltozása szinte korlátlan. Ilyen az arany, amely igen vékony – szinte áttetsző – lemezzé hengerelhető – húzható. A polikristályok – mint pl. az acél – képlékeny alakváltozása korlátozott, mivel a képlékeny alakváltozás egy-egy kristályon belül végbemehet, de az egyes kristályok korlátlanul nem csúszhatnak el egymáson: ekkor szakad az anyag. (Megjegyezzük egyrészt, hogy egy egykristályon belül a diszlokációk és diszklinációk is gátolják a korlátlan képlékeny alakváltozás létrejöttét, másrészt, hogy a melegen hengerelt és a hidegen hajlított terminológia pontosan tükrözi az anyag viselkedésének a lehetőségeit.)

A szilárd testek között szokás megemlíteni a jég, azon belül is a gleccserek folyását: a gleccserek, csakúgy, mint a folyók, föntről lefelé haladnak és követik a hegy felszínét: elkanyarodnak, egyesülnek és szétválnak, valamint követik a hegyen lévő kisebb-nagyobb hullámokat. A folyásra vonatkozó hasonlat jó, de nem teljes. Ugyanis két folyó találkozása során a két folyót alkotó víz és hordalék összekeveredik. Lehet, hogy akár kilométereken keresztül szemmel is látható a két folyó egymásba keveredése, de egy távolság után a két folyó már nem választható szét. (Hasonlóan ahhoz, ahogy egy óceánba ömlő nagy folyót akár kilométereken keresztül lehet a tengerben, annak fenekén követni, de előbb-utóbb úgy összekeverednek, hogy szétválaszthatatlanok.) A gleccserek esetében ez az összekeveredés nem jön létre. A gleccserekben végig nyomon követhető a két jégár. És egy másik különbség, ami szintén jelzi, hogy a jég a folyása ellenére is szilárd: a folyókon közlekedhetünk csónakon, a jégen nem.

A szilárd test a térfogatát lényegében nem változtatja: hasonlóan a folyadékhoz az összenyomhatóság igen kis mértékű, néhány (térfogat) ezrelék, vagy tízezrelék.

Szemcsehalmaz

A szemcsehalmaz szilárd testekből – szemcsékből – áll. Elvben tehát a szilárd testek alatt kellene a viselkedését ismertetni. Mégis oly sok ponton tér el a szemcsehalmaz viselkedése a szilárd test viselkedésétől, hogy célszerű, sőt, szükséges, külön testként foglakozni vele.

A szemcsehalmaz struktúráját tekintve diszkrét: kis erővel, sőt, olykor csak az oldaltámasz megszűnése okán is a szemcsehalmaz átrendeződik. Mindemellett a szemcsehalmaz viselkedése legalább olyan sokszínű, mint a folyadéké, vagy a szilárd testé. A szemcsehalmaz viselkedhet diszkrét és folytonos módon, viselkedhet úgy is, mint folyadék, és úgy is, mint szilárd test.

A szemcsehalmaz diszkrét jellegű viselkedése: a szemcsék a külső erő hatására átrendeződnek. Ez lehet áthalmozás – lapátoljuk a kavicsot, a szenet –, fellazulás – a homokban lépve kibuggyan talpunk alatt a homok – , vagy tömörödés – a homokba bevibráljuk a cölöpöt –.

A szemcsehalmaz folyhat, mint a folyadék – a cementet pumpáljuk –, a szemcsehalmazban elmerülhet egy szilárd test – pl. vibrálva a homokot és nem a tárgyat, a homoknál sűrűbb test elmerül benne –.

A szemcsehalmaz befeszül, és szilárd testként viselkedik: egy edényben lévő homokban fel-le mozgatva egy pálcát az úgy beszorul, hogy felemelhető a homokkal telt edény, vagy tömörítve az átrendeződés folyamata megszűnik (és legfeljebb a szemcsék aprózódása lép fel).

4 ERŐJÁTÉK ÉS ÁTRENDEZŐDÉS A SZEMCSEHALMAZBAN

A szemcsehalmazban és a kontinuumban mind az erőjáték, mind az alakváltozás lényegben tér el. Ezt néhány példán mutatjuk be. Az itt következő példákban a szemcsehalmazok szárazak és súrlódásmentesek. Az önsúly hatását figyelmen kívül hagyjuk. A száraz szemcsehalmazban csak nyomóerők ébrednek.

4.1 *Sík szemcsehalmazok*

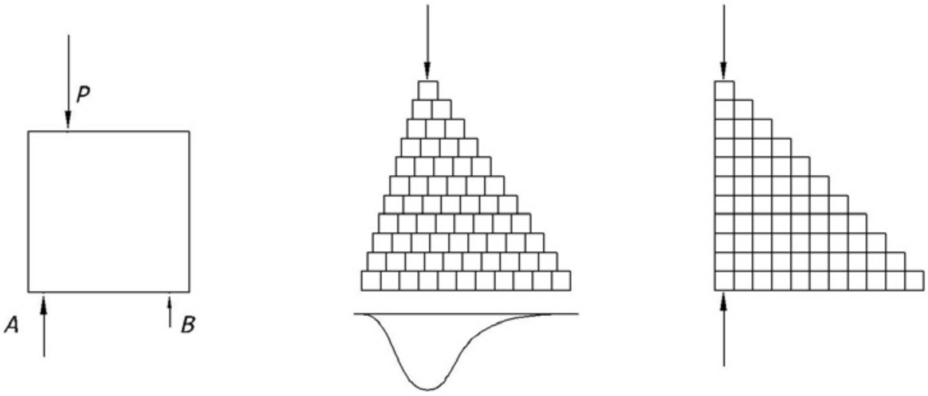
Négyzetek

A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes négyzetek két ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes négyzet mindig két, alatta lévő négyzetre „támaszkodik”. A legalsó sor alatt vízszintes „perem” található.

Az erő függőlegesen halad föntről lefelé, minden szinten tovább oszlik. Az erők párhuzamosak. Az erők megoszlása binomiális. Hangsúlyozni kell, hogy sem vízszintes erő, sem nyíró erő nem lép fel.

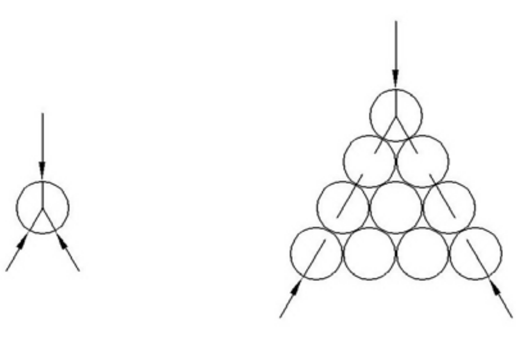
A rendszer stabil.

Szélső helyzetben az eloszlás „konstans”. Azaz az erő nem „terül”, hanem függőlegesen „szalad le”. Megjegyezzük, hogy ez a rendszer a halmaz magasságának függvényében lehet stabil és instabil is.



3. **ábra**: Az erők terülése négyzetekből rakott halmazban

Körök



4. **ábra**: Az erők „lefutása” körökből rakott halmazban

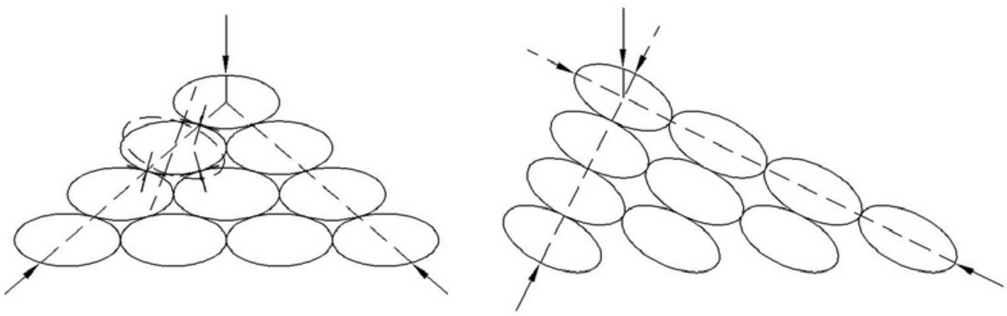
A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes körök két ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes kör mindig két, alatta lévő körre „támaszkodik”. A legalsó sor alatt a köröknek megfelelő „periodikus” „perem” található.

Az erő ferdén halad föntről lefelé. Csak két erő van. Hangsúlyozni kell, hogy csak két ferde irányú erő ébred, és nyíró erő nem lép fel.

A rendszer instabil.

Szélső helyzetben a két erő helyett egy erő lép fel, amely függőleges. A rendszer instabilitása „megmarad”.

Oválisok



a) b)

5. **ábra**: a: egy oválisokból rakott halmaz instabil b: az erők „lefutása” centrálisan elrendezett oválisok halmazában

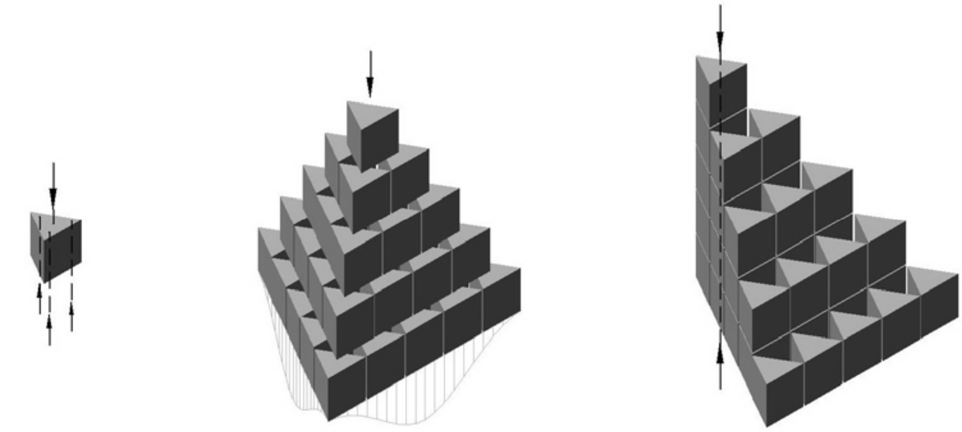
A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes oválisok két ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes ovális mindig két, alatta lévő oválisra „támaszkodik”. A legalsó sor alatt az oválisnak megfelelő „periodikus” „perem” található.

Az általános helyzetű, periodikusan elrendezett halmaz nem képes az erőt egyensúlyozni. A halmaz átrendeződik, széthull. Csak abban az esetben képes a halmaz az erőt felvenni, ha az oválisok érintkezési pontjaiban az érintők párhuzamosak, és a csúcson lévő ovális érintési pontjai normálegyeneseinek metszéspontján halad át a halmazt terhelő erő hatásvonala. Ezt az elrendezést centrálisan elrendezett halmaznak nevezzük.

Nem nehéz észrevenni, hogy a körökből rakott halmaz is centrális. Tehát a körökből rakott halmaz jellemzése igaz a centrálisan elrendezett oválisok halmazára is.

4.2 *Térbeli szemcsehalmazok*

Háromszög (hatszög) alapú egyenes hasábok



6. **ábra**: Az erők terülése háromszög (hatszög) alapú egyenes hasábokból rakott halmazban

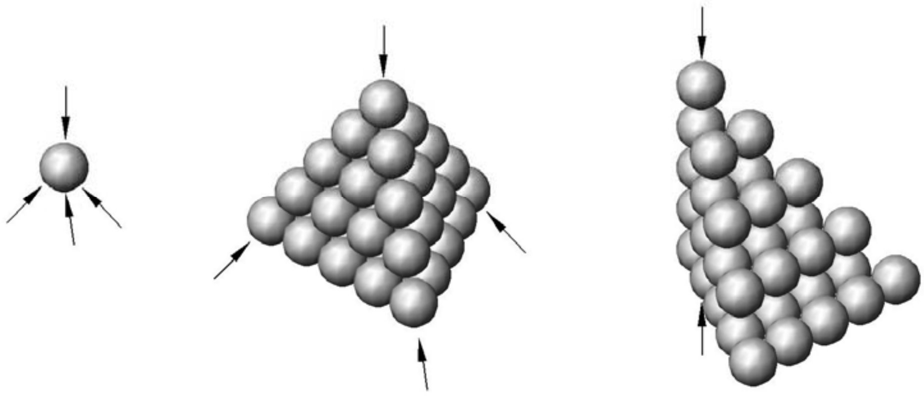
A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes hasábok három ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes hasáb mindig három, alatta lévő hasábra „támaszkodik”. A legalsó sor alatt vízszintes „perem” található.

Az erő függőlegesen halad föntről lefelé minden szinten tovább oszlik. Az erők párhuzamosak. Az erők megoszlása trinomiális (minden metszetben binomiális!). Hangsúlyozni kell, hogy sem vízszintes erő, sem nyíró erő nem lép fel.

A rendszer stabil.

Szélső helyzet kétféle lehet: a térbeli halmaz egyik „lapja” függőleges, vagy két „lapja” függőleges. Az első esetben visszakapjuk síkbeli halmaz. A második esetben a síkbeli halmaz szélső esetét.

Gömbök



7. **ábra**: Az erők „lefutása” gömbökből rakott halmazban

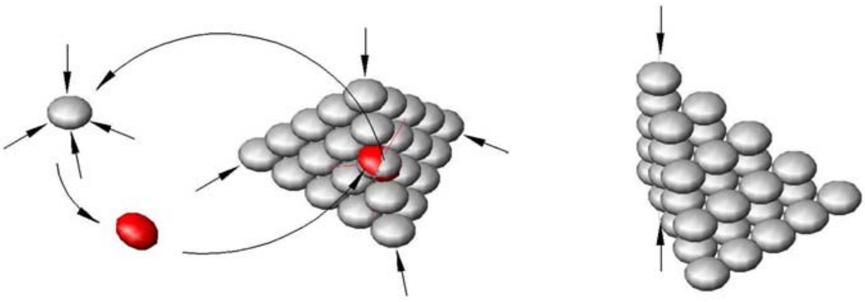
A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes gömbök három ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes gömb mindig három, alatta lévő gömbre „támaszkodik”. A legalsó sor alatt a gömböknek megfelelő „periodikus” „perem” található.

Az erő ferdén halad föntről lefelé. Csak három erő van. Hangsúlyozni kell, hogy csak három ferde irányú erő ébred, és nyíró erő nem lép fel.

A rendszer instabil.

Szélső helyzetben a három erő helyett kettő, vagy egy erő lép fel, amely utóbbi függőleges. Az első a síkbeli esettel, a második a síkbeli eset szélső helyzetével egyezik meg. A rendszer instabilitása megmarad.

Oválisok



a) b)

8. **ábra**: a: egy oválisokból rakott halmaz instabil b: az erők „lefutása" a szélső helyzetben

A halmazban fellépő erők meghatározása során azzal a feltevéssel élünk, hogy az egyes oválisok három ponton támaszkodnak föl, és ennek során minden egyes ovális mindig három, alatta lévő oválisra „támaszkodik". A legalsó sor alatt az oválisnak megfelelő „periodikus" „perem" található.

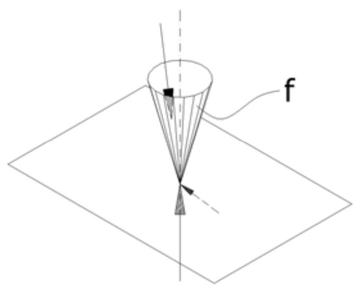
Az általános helyzetű, periodikusan elrendezett halmaz nem képes az erőt egyensúlyozni. A halmaz átrendeződik, széthull. Csak abban az esetben képes a halmaz az erőt felvenni, ha az oválisok érintkezési pontjaiban az érintő síkok párhuzamosak, és a csúcson lévő ovális érintési pontjainak normálegyeneseinek metszéspontján halad át a halmazt terhelő erő hatásvonala. Ezt az elrendezést centrálisan elrendezett halmaznak nevezzük.

Nem nehéz észrevenni, hogy a gömbökből rakott halmaz is centrális. Tehát a gömbökből rakott halmaz jellemzése igaz a centrálisan elrendezett oválisok halmazára is.

Megjegyzés: a halmazok kialakításában kétféle elrendezés lehet: eltolással, vagy eltolással *és* elforgatással. Itt csak eltolással generált halmazok esetét mutattuk be, a másik kapcsán korábbi tanulmányainkra utalunk.

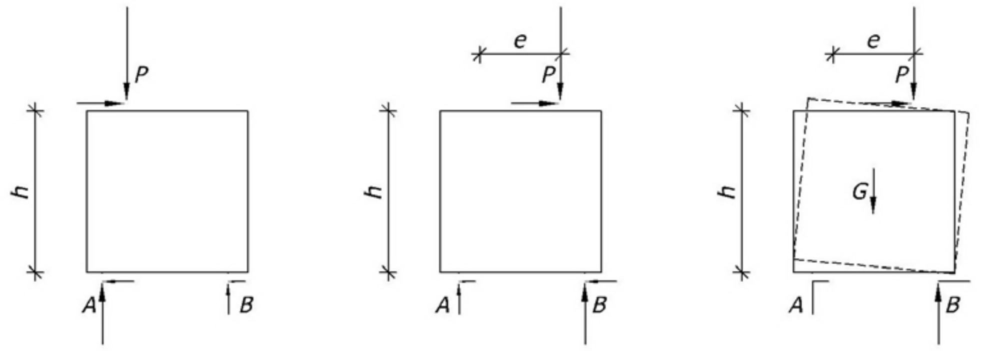
4.3 *A súrlódás hatása*

A súrlódás azt teszi lehetővé, hogy egy felülettel érintkezésben lévő testet nem csak normálerővel, hanem a súrlódási szögnek megfelelő kúpon belül ható erővel lehet egyensúlyozni. Azaz nem csak a síkra merőleges, hanem – igaz, hogy csak korlátozott mértékben, de – a síkba eső erőt is képes a rendszer egyensúlyozni.



9. **ábra**: A súrlódási kúp

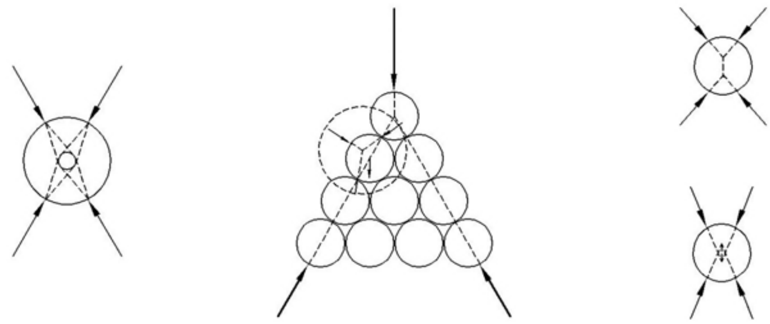
Tehát a súrlódás lehetővé teszi, hogy a négyzetek, illetve a hasábok esetén nem csak függőleges, hanem, vízszintes erőt is egyensúlyozzon a halmaz. A függőleges erő megoszlása változik a vízszintes erő megoszlása függvényében, mivel a nyomatéki egyenletben már nem csak a függőleges reakcióerő, hanem a vízszintes erő is szerepel. Ugyanakkor a vízszintes erő megoszlása nem egyértelmű, és mivel semmilyen feltétel nem ismert, hogy hogyan oszlik meg a támaszokon a két vízszintes erő, a feladat egyértelműen nem oldható meg. Különböző feltételezéseket tehetünk. Az egyik, talán még logikusan is hangzó feltevés, hogy a támaszban ébredő vízszintes erő legyen arányos az ott létrejövő függőleges reakcióerő nagyságával. Ez egyértelmű megoldást tesz lehetővé, de csak logikai úton érvelhetünk mellette. Megjegyezzük, hogy az eloszlás értelemszerűen megváltozik. Az is világos, hogy a súrlódási tényező egyértelműen határozza meg azt, hogy mekkora az a vízszintes erő, amelyet a halmaz elméletileg képes egyensúlyozni. Úgy érvelhetünk, hogy az erő mintha nem a tényleges hatáspontban, hanem ettől a vízszintes erő irányába $e = fh$ értékkel eltolva hatna. Itt e a külpontosság f a súrlódási tényező, és h a négyzet, vagy a hasáb magassága. Ez egyúttal arra is felhívja figyelmet, hogy túl nagy vízszintes erő hatására a halmaz felborul, mivel húzóerőt a halmaz nem képes felvenni. Természetesen a halmaz elemeinek a súlya képes bizonyos mértékig stabilizálni halmazt, de ez a stabilizáló hatás is korlátozott.



a) b)

10. **ábra**: a: a súrlódás hatása a négyzetekre (és a hasábokra) b: az önsúly stabilizáló hatása

A körök, valamint oválisok (értelemszerűen gömbök és oválisok) esetén a súrlódási kúpok metszése már nem egy pont, hanem egy véges mértékű tartomány. Ez még nem stabilizálja a halmaz külső felületén lévő szemcséket, erre legfeljebb egy külső erő, vagy a szemcse súlya képes. Végül rá kell mutatni arra, hogy ha már egy-egy külső erő, vagy a szemcsék súlya már stabilizálta a halmaz külső szemcséit, akkor a belső szemcsékben a centrális erőhálózat átalakul hatszögletűvé.

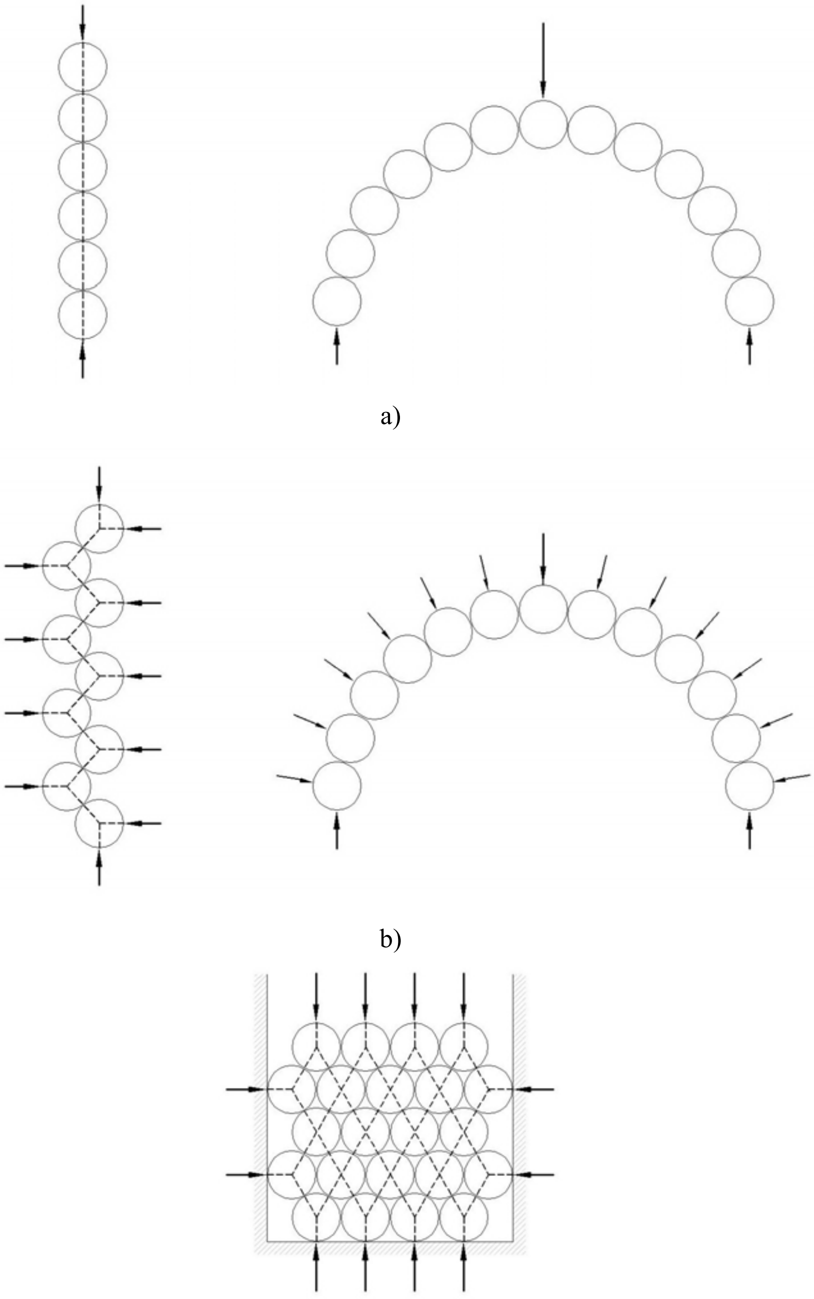


a) b) c)

11. **ábra**: a: a súrlódás hatása a körökre (és a gömbökre) b: a súrlódás hatása a körök (és gömbök) halmazát nem stabilizálja; az önsúlynak lehet stabilizáló hatása (külső szemcse) c: a súrlódás hatása a körök (és gömbök) halmazában a centrális megoszlást hatszögletűvé alakítja át (belső szemcse)

4.4 *Stabilizáló erők szemcsehalmazokban*

A szemcsehalmazok stabilitását az önsúly, valamint a külső erők – az oldalnyomás – adhatják meg. Erre példaként hozzuk fel, hogy a mélység növekedésével a szemcsés talajban is nagyobb határfeszültséget vehetünk fel: a terhelő erő gátolja az oldalkitérést, ezzel stabilizálja az alap alatti talajt. A következő ábrákon ezt ábrázoljuk szemcsehalmaz esetéire.



c)

12. **ábra**: a: instabil oszlop és ív szemcséből b: külső erőkkel stabilizált oszlop és ív szemcséből c: leterhelő súllyal stabilizált szemcsehalmaz

4.5 *Erőeloszlás edénybe helyezett szemcsehalmazokban*

A szemcséket most nem halmazokba rakjuk, hanem edénybe helyezzük oly módon, hogy egyrészt érvényesül a kétpontos (sík halmaz), illetve a hárompontos (térbeli halmaz) felfekvés hipotézise. Feltesszük továbbá azt is, hogy az edény fala függőleges és abszolút merev, továbbá a szemcsehalmaz szélén lévő szemcsék érintkeznek az edény falával.

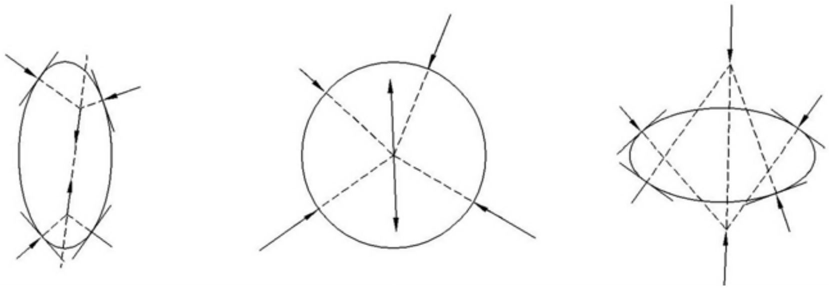
Megjegyezzük, hogy ebben a tárgyalásban már csak az oválisokkal foglakozunk, a négyzet (hasáb) már – bármi furcsa – azonos az ovális esetével, és a körök (a gömbök) esete a centrális elrendezés miatt az ovális speciális eseteként megkapható. Megjegyezzük azt is, hogy ez tulajdonképpen a félsík (illetve a féltér) esetével rokonítható.

Először utalunk arra, hogy egy ovális nem párhuzamos és nem egy normálisra eső érintő egyenesek (térben érintő síkok) esetén milyen feltétel mellett lehet egyensúlyban két (térben három) erő hatása alatt két (térben három) támaszpont mellett. Az egyensúly beálltának a feltétele természetesen az, hogy az egyes szemcsék álljanak be abba helyzetbe, hogy az erők hatásvonalai éppen az ábrázolt helyzetbe kerüljenek.

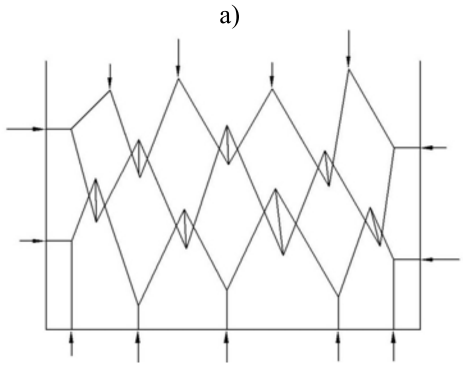
Megjegyezzük, hogy a feladat statikailag határozott, bár a bizonyítást itt mellőzzük. Mindösszesen vázoljuk a statikai határozottság bizonyításának főbb lépéseit. A támaszpontok száma kettő (térben három). Az egyensúlyi egyenletek száma három (térben hat). Az ismeretlenek száma: a két (a térben három) reakcióerő nagysága és a szemcse egy (térben három) elfordulási szabadságfoka, amely összesen három (térben hat). Először egy szemcsére igazoljuk, aztán kettőre, végül tetszőlegesen sokra. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy csak olyan szemcsehalmazra igaz az állítás, amelyben igaz a két-, illetve a hárompontos feltámaszkodás hipotézise. Ettől eltérő esetben is bizonyítható a statikai határozottság, bár több lehetséges esetet kell végigkövetni.

A lentebb következő ábra jó mutatja egyrészt, hogy a rendszert az oldalnyomás stabilizálja, és azt is, hogy az erőknek jól meghatározott hálózata alakul ki. A rendszer stabil. Oldalnyomó erő van, de nincs nyíróerő. Megjegyezzük, hogy az oldalnyomás nem csökken a mélységgel, mert zárt edényben a teljes felületen hat a külső erő. Egy erő hatása alatt az edénybe helyezett rendszer akkor és csak akkor lesz stabil, ha a szomszédos szemcsék súlya kellő oldalnyomó erőt hoz létre. (Mint ahogyan azt a talajmechanikából tudjuk!)

Végül egy fontos megállapítás: a szemcsehalmazban nincs feszültség. Erők vannak, de feszültség nincs.



a)

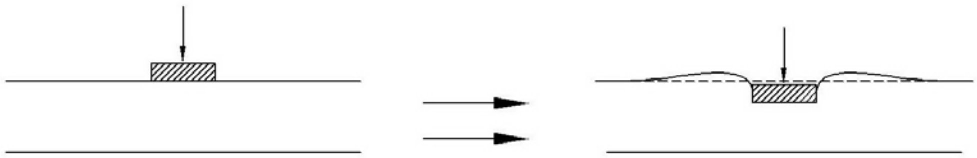


b)

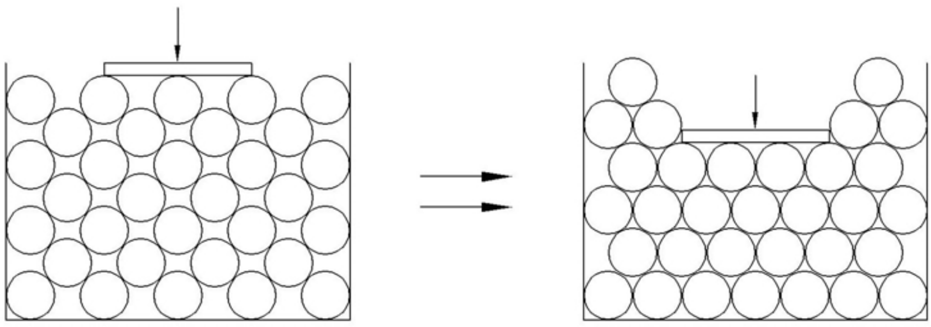
13. **ábra**: a: egy ovális egyensúlya nyújtott, centrális és metsző hatásvonalak esetén
b: a hatszögletű hálózat a szemcsehalmazban

4.6 *A szemcsehalmazok átrendeződése*

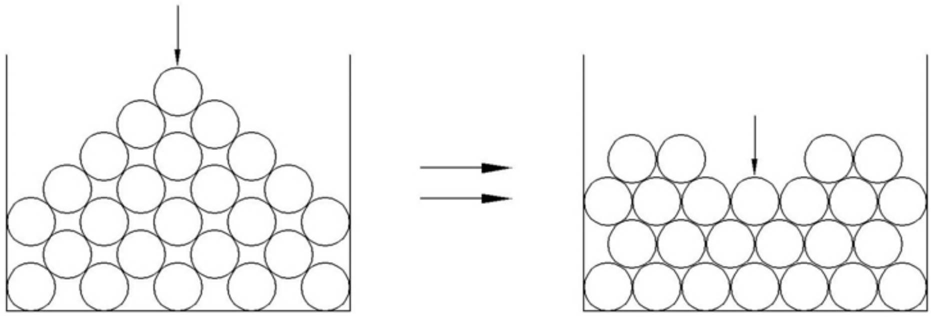
A szemcsehalmaznak nincs alakváltozása: a szemcsehalmazok tömörödnek és átrendeződnek. Erre néhány példát mutatunk be.



14. **ábra**: Szemcsehalmaz átrendeződése pecsétnyomás alatt



15. **ábra**: Szemcsehalmaz tömörödése

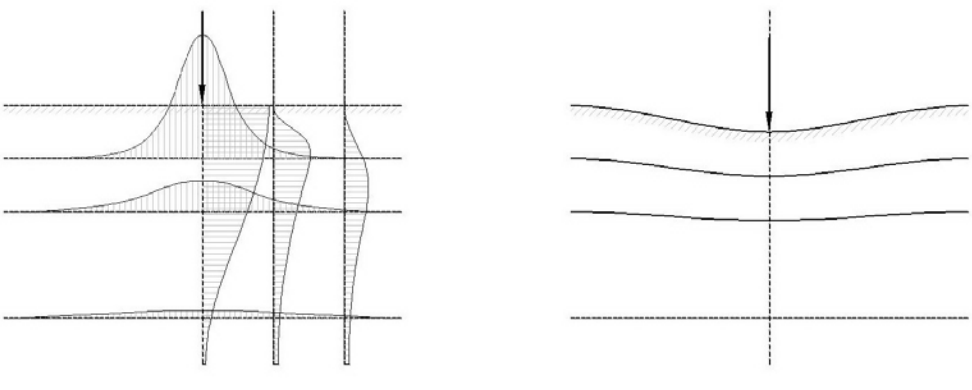


16. **ábra**: Szemcsehalmaz átrendeződése egyensúlyi helyzetbe

5 FESZÜLTSÉG ÉS ALAKVÁLTOZÁS A KONTINUUMBAN

A kontinuumban feszültségekről és alakváltozásokról beszélünk. A kontinuum statikailag határozatlan. Az ismeretlen feszültségmezők száma (hat) több, mint a rendszer egyensúlyára felírható egyensúlyi egyenletek száma (három). Ezért a feszültség megoszlásában a kontinuum alakváltozása szerepet játszik: az alakváltozás figyelembe vétele az a feltétel, amely egyértelmű peremérték-feladat kitűzését teszi lehetővé. Ehhez viszont az anyag fizikai viselkedését kell ismerni. Ez merőben eltérő megközelítést igényel, hiszen a szilárd, deformálódásra képtelen, azaz merev testek halmazában az erőjáték független a szemcsék tényleges fizikai viselkedésétől. A rugalmasság már egy új feltevés. A talajmechanikában és a kőzetmechanikában a rugalmas féltér, mint a jelenségek leírására alkalmazott modell, gyakran szerepel. Mi is ezt tekintjük.

A rugalmas félsíkban fellépő normálfeszültségek megoszlását, illetve a felszín süllyedését ábrázoljuk egy-egy ábrán.



a) b)

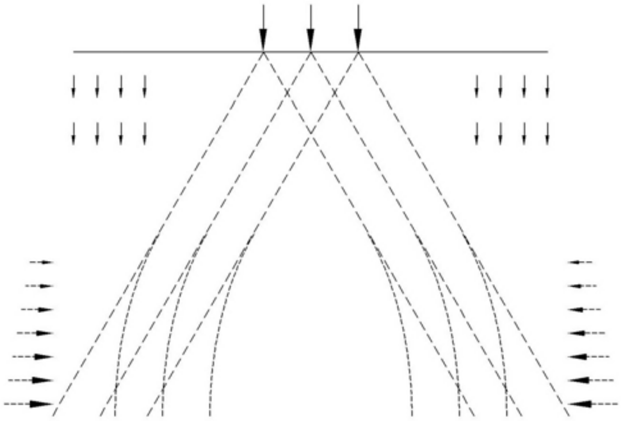
17. **ábra**: a: a rugalmas félsíkban fellépő normálfeszültségek megoszlása
b: a rugalmas félsík felszínének a süllyedése

A látottak alapján világos, hogy a rugalmas féltér – a kontinuum – alapjaiban másképpen viselkedik, mint egy szemcsehalmaz.

A rugalmas féltérben a függőleges erő terül ugyan, de nem úgy, mint a négyzetek vagy a körök halmaza esetén. A rugalmas féltérben a mélységgel arányosan csökken az oldalnyomás, és minden irányban végtelen távolságra terjed ki a hatás, hiszen a vizsgált tartomány féltér.

Ezzel szemben négyzetek esetén nincs oldalnyomás, körök esetén nem értelmezhető sem az oldalnyomás, sem a függőleges erő „terülése”, az oválisok esetén az oldalnyomás terül, de a terülés a stabilizáló önsúly nélkül nem jön létre, legfeljebb a köröknél tapasztalt jelenség léphet fel.

Ha egy szemcsehalmazban fellép a szemcsehalmaz önsúlyának a stabilizáló hatása, úgy a köröknél kijelölhető kúpon belül jön létre az erő terülése, és fellép az a jelenség, hogy egy mélység után az önsúlyból fennálló oldalnyomás edényként „veri” vissza a koncentrált függőleges erő következtében a szemcsehalmazban kialakult oldalnyomó erőt. Ekkor ezen mélység alatt a rendszer zárt edényként működik, megszűnik a terülés, és nem nő tovább az oldalnyomás. (Ezt a mélységet a talajmechanikában korábban bevezetett határmélység fogalmával analóg fogalomnak tekinthetjük.)



18. **ábra**: Az oldalnyomás „bezáródása” szemcsehalmazban

6 A SZEMCSÉTŐL A KONTINUUMIG

6.1 *Bevezetés*

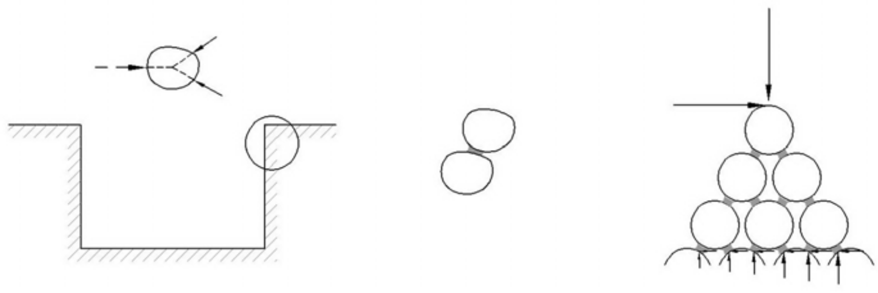
A szemcsehalmazok erőjátékát és átrendeződését, valamint a kontinuumban fellépő feszültségeket és alakváltozásokat összevetve megállapítható, hogy a két modell lényegében eltérő módon viselkedik. A gyakorlatból tudjuk, hogy sok szemcse esetén nem áll módunkban minden szemcse átrendeződését, és minden szemcse egyensúlyát meghatározni, szükség van egy folytonos modellre, amely a számítások elvégzése szempontjából jobban kezelhető. A gyakorlatból azt is tudjuk, hogy a szemcsés közegek viselkedésben van olyan elem, amely hasonlít a kontinuum viselkedésre, tehát azt várnók, hogy valamilyen egyedi fizikai egyenletek esetén a kontinuum elegendően pontos modell lehet a szemcsés közegekre nézve is. A feladat tehát az, hogy keressük meg azokat a fizikai jelenségeket, és hozzá párosítva azokat a matematikai módszereket, ahogyan a szemcsék halmaza „átalakul” kontinuummá.

Ennek kapcsán teszünk egy megjegyzést: különböző szempontok alapján világos, hogy a szemcsék méretének csökkentésével, határátmenettel a szemcsék halmazából kontinuum nem nyerhető.

6.2 *Átmeneti formák: víz és ragasztó*

A szemcsehalmazok egyensúlya alapján világos, hogy a szemcsehalmazban függőleges fal nem alakulhat ki. A tapasztalat az, hogy szemcsés közegek – homok, iszap – bizonyos körülmények között megállnak függőleges falként. Ez az jelenti, hogy a szemcsék nem szárazan kapcsolódnak egymáshoz, hanem össze vannak „ragasztva”. A ragasztó szerepét betöltheti a vízburok, de betöltheti valamilyen tényleges ragasztó anyag is. A ragasztót itt a kohézió szinonimájaként alkalmazzuk, bár a ragasztó ebben a felfogásban általánosabb fogalom, mint a talajmechanikában alkalmazott kohézió fogalma.

A ragasztó már lehetővé tesz húzóerő átvitelét (is). Az világos, hogy a ragasztó anyag szemcseként való modellezése nem javít a helyzeten, mivel a szemcsék esetén azt tételezzük fel, hogy abban csak nyomóerők ébredhetnek. Ezért az összeragadt szemcsék esetében az alábbi feltevéssel élünk: két szemcse között létrejön egy, a szemcséket összekötő kontinuum, amely a szemcsékhez húzó, nyomó és nyírófeszültséggel kapcsolódik. Megjegyezzük, hogy kisebb szemcsék feltételezése a két szemcse között – a ragasztó helyett –nem elégséges, mert a szemcsék, értelmezésüket tekintve, csak nyomóerőt adnak át.



a) b) c)

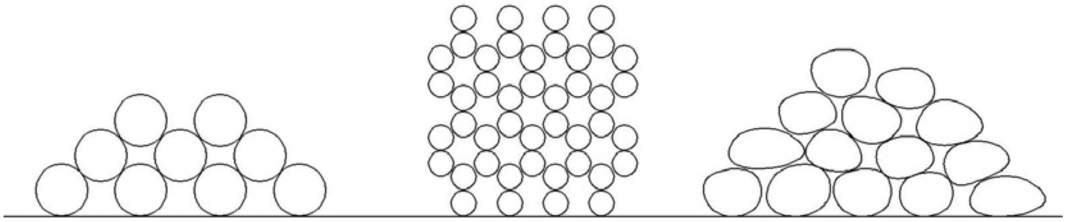
19. **ábra**: a: függőleges fal esetén szemcsében ragasztónak kell léteznie b: a ragasztó feltevése két szemcse között c: a ragasztó kontinuummá alakítja át a szemcsehalmazt

Megjegyezzük, hogy most már két szemcse, közöttük egy kapcsolattal, statikailag határozott rendszert alkot, míg két vagy több kapcsolattal a rendszer statikailag határozatlanná válik –csakúgy mint a kontinuum. Megjegyezzük azt is, hogy a ragasztó miatt a szemcsék egymáshoz viszonyított mozgása – azaz az átrendeződése, de még csak a helyzetváltoztatása is – megszűnik. Azaz a ragasztó matematikai értelemben kontinuummá fogja össze a szemcsehalmazt. Fontos utalni arra, hogy ebben az összeragasztott szemcsehalmazban nyíró- és húzóerők felléphetnek.

Végül utalunk arra, hogy ragasztó esetén különböző belső struktúrákat értelmezhetünk. Ilyen az egyszemcsés, a sejt- és a pehelyszerkezet, valamint a makroporózus szerkezet.

6.3 *A befeszült szemcsehalmaz, mint folytonos közeg*

A szemcsehalmazok egyensúlya alapján világos, hogy a szemcsehalmaz minden erő hatására felveszi az egyensúlyi elrendeződését. Az is világos, hogy beállhat egy olyan állapot, amikor az erőhatás nagyságának növelése mellett már nem változtatja az elrendeződését a halmaz, nem képes tovább tömörödni: befeszült. Ez esetben a szemcsék egymáshoz viszonyított mozgása – azaz az átrendeződése, és a helyzetváltoztatása is – megszűnik. Azaz a befeszülés matematikai – azon belül topológiai – értelemben kontinuummá fogja össze a szemcsehalmazt. Ugyanakkor ebben a kontinuumban sem húzó-, sem nyíróerő nem léphet föl. Továbbra is csak nyomóerők léphetnek fel a szemcsehalmazban, a befeszülés csak az egyes szemcsék átrendeződését, mozgását gátolja.



20. **ábra**: a: laza, egyszemcsés szemcsehalmaz b: sejtszerkezetként tömör szemcsehalmaz c: befeszült szemcse és befeszült szemcsehalmaz

Megjegyezzük, hogy sem a száraz szemcsékből alkotott pehely-, sem a makroporózus szerkezetű halmaz nem stabil.

6.4 *A kontinuum, mint hipotézis*

A kontinuum, mint arra fentebb már utaltunk, határátmenettel nem képezhető. Az összeragasztott szemcsehalmazban, különösképpen sejt-, vagy pehelyszerkezet esetén, a kapcsolati pontokban nyomatékok is kell, hogy ébredjenek. A kontinuumban viszont ilyen belső erőt nem értelmezünk (és mint arra a korábbi kutatásainkban rámutatunk, csak a rácskontinuumban értelmezhető nyomaték, mint belső erő, bár ekkor a rendszer már nem folytonosan, hanem diszkrét módon viselkedik). A befeszült szemcsehalmaz kinematikailag hasonlít a kontinuumhoz, de mivel a befeszült szemcsehalmazban sem húzó-, sem nyíróerő nem ébred, ezért ez sem választható a kontinuum matematikai hátteréül.

Lehetséges útként a ragasztónál alkalmazott módszer, egy feltevés bevezetése marad: feltesszük, hogy az anyag nem rendelkezik struktúrával, és az anyag maga a kontinuum.

7 ÖSSZEFOGLALÁS

Az előadásban áttekintettük a diszkrét és a folytonos fizikai és matematikai fogalmait. Ezt követően áttekintettük az anyagok viselkedési módját a halmazállapotuktól függően. Ennek során figyelmet szenteltünk a szemcsékből álló halmazoknak is. Az áttekintés után megadtuk a diszkrét és a folytonos viselkedésű rendszerek fogalmát.

Az előadás fő mondanivalóját a szemcsehalmazok erőjátéka és az ennek során fellépő átrendeződése alkotta. Ismertettük a síkbeli (térbeli) halmazok erőjátékát, ha a halmaz négyezetekből (hasábokból), körökből (gömbökből), illetve oválisokból (oválisokból) állt. Rámutattunk, hogy a három különböző szemcsehalmaz három jól elkülöníthető erőrendszernek felel meg. A négyzet (hasáb) párhuzamos erőrendszert alkot, a körökből (gömbökből) álló halmazban csak két (három) erő ébred, míg oválisok esetén az erők hatásvonalai hatszögletű hálózatot alkotnak. Megmutattuk azt is, hogy oválisok esetén a halmaz egyensúlya csak a halmazt alkotó szemcsék átrendeződésével jöhet létre, valamint azt is, hogy az egyensúlyi állapot a két-, illetve hárompontos feltámaszkodás hipotézise mellett statikailag határozott rendszert alkot.

Az előadás végén megmutattuk, hogy egy szemcsehalmaz kinematikai szempontból kétféle módon – ragasztó és befeszülés – is „átalakulhat” kontinuummá, de egyik esetben sem jön létre olyan belső erőrendszer, amely megfelelne a kontinuuménak. Ezért a kontinuum értelmezésének lehetséges útjaként a kontinuum létezése hipotézisének a bevezetése tűnik kézenfekvőnek.

IRODALOM

Arnold V.I. 1985. *A mechanika matematikai módszerei.* Műszaki könyvkiadó, Budapest.
Budó Á. 1972. *Mechanika.* Tankönyvkiadó, Budapest. (Ötödik kiadás)
Császár Á. 1970. *Bevezetés a topológiába.* Akadémiai Kiadó, Budapest
Császár Á. 1983.: *Valós analízis.* I.-II. Tankönyvkiadó, Budapest
Kézdi Á. 1952. *Talajmechanika I.* Tankönyvkiadó, Budapest
Kézdi Á. 1954. *Talajmechanika II.* Tankönyvkiadó, Budapest
Komornik V. 2003. *Valós analízis előadások.* I.-II. Typotex, Budapest
Lámer G. 1984a. Contradictions in the Theory of Micropolar Elasticity and Their Causes, *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, **II**(1): 12-16
Lámer G. 1985. On Continuous and Discrete Mechanical Systems, *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, **III**(3):12-15
Lámer G. 1994. Folytonos és diszkrét modellek a kontinuummechanikában és a termodinamikában, *Termodinamikai előadások*. Szerk.: Lámer G., Eötvös L. Fiz. Társ., Budapest, 76-81
Lámer G. 2006. *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006. Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 145-156.
Lámer G. 2006. *Symmetry and asymmetry, or regularity and irregularity in the force distribution in the heaped bodies*, Culture and Science. Ed.: Darvas Gy. **17**: 221-233
Lámer G. 2007. *Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései*, Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007. Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. 301-314
Love, A.E.H. 1927. *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Fourth ed. Cambridge, At the University Press
Лурье, А.И. 1970. *Теория упругости*. Наука, Москва
Mathematics Dictionary 1992. Ed.: James G. and James R.C. Fifths ed. Chapman & Hall