

Áttekintés az integrálhatósági feltételekről izotrop, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve

Lámer Géza

Lámer és Lámer Kft. e-mail lamer@emma.hu

Debreceni Egyetem, AMTC MK, Építészmérnöki Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS: A jelen előadásban áttekintjük az izotrop, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájával kifejezett integrálhatósági feltételeket.

Kulcsszavak: izotrop hiperrugalmas testek, egyensúlyi entrópia, a hiperrugalmasság integrálhatósági feltétele

1 BEVEZETÉS

A kontinuumok esetén a belső mechanikai állapot meghatározásának egyik feltétele a fizikai egyenletek, azaz az erő és az alakváltozás típusú mennyiségek közötti kapcsolat ismerete. A két mennyiséget általában másodrendű tenzorként szokás modellezni. Ez esetben a két tenzor közötti kapcsolat tetszőleges formáját egyrészt egy matematikai – a Cayley–Hamilton-tétel –, másrészt, a fizikai oldalról, a termodinamika törvényei korlátozzák. Az első azt mondja ki, hogy a feszültségi tenzor az alakváltozási tenzor nulladik, első és második (létezik ettől eltérő változat is) hatványával egyértelműen meghatározható. A termodinamika törvényei szerint a feszültségnek az alakváltozási tenzor szerinti három polinommal megadott kifejezésében szereplő együtt-
hatók kifejezhetők valamely termodinamikai változónak az alakváltozási tenzor invariánsa szerint vett parciális differenciálhányadosával. Ekkor a fentebb említett együtt-
hatók nem függetlenek, mivel az integrálhatósági feltételeket ki kell, hogy elégítsék.

A fenti konstrukció a XIX. sz. végén ismert volt, bár nem volt szerves része sem a kontinuummechanikának, sem a termodinamikának. A XX. sz. közepén több, kisebb-nagyobb eredmény született, de általános esetben a kérdés vizsgálata nem történt meg.

Legújabban Asszonyi és Ván vizsgálta az izotrop, hiperelasztikus testek esetén, hogy a feszültség-alakváltozás összefüggés az alakváltozásban lineáris, vagy négyzetes törvény szerint tekinthető elméletileg megalapozhatónak. Ennek során a sorfejtésben szereplő együtt-
hatókra vonatkozó korlátozás létezésének kérdését újra megfogalmazták; Ván-Asszonyi (2006).

Ezt követően az ETTE pályázatot tűzött ki a felmerült kérdés tisztázására.

A jelen előadásban ezt a kérdéskört tekintjük át, különös tekintettel az ETTE 1. sz. feladatára. Ennek megfelelően ismertetjük az ETTE 1. sz. feladatát, megvizsgáljuk a kontinuummechanikai hátterét és rövid történeti áttekintést adunk. Ezt követően ismertetjük a felvetett kérdésnek a szerző által adott átfogalmazását, mint integrálhatósági feltételt, valamint az elért eredményeket (Lámer, 2007a). Végezetül kitérünk az ETTE 1. sz. feladatára beérkezett másik pályázat által választott matematikai útra (lásd Tóth, 2007) is.

2 AZ ETTE 1. SZ. FELADATA

Az ETTE 1. sz. kitűzött feladata a következő (lásd Lámer (2007/a), p. 5., az egyenletek eredeti számozását megtartottuk).

Izotrop, rugalmas anyagú kontinuumok esetén – a Cayley–Hamilton-tétel figyelembe vételével – a feszültségtenzor az alakváltozási tenzor nulladik, első és második hatványainak összegeként írható fel úgy, hogy a tagok együtthatói – a továbbiakban ezt fogjuk f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvényeknek nevezni – az alakváltozási tenzor főinvariánsainak függvényei.

Hiperelasztikus testek esetén az f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvények az s egyensúlyi entrópiafüggvény (szabadenergia-függvény) parciális differenciálhányadosaival írhatók fel. Ezekben az összefüggésekben mindhárom f_i függvény szerepel.

Az ETTE 1. sz. feladata arra vonatkozik, hogy milyen feltételek mellett lehet az anyagtörvényt nem három, hanem csak két f_i függvénnyel felírni.

Maga a feladat fizikai indíttatású, hiszen az alakváltozások olyan összefüggéseit keresi, amely összefüggések mellett az anyagtörvény már nem az alakváltozási tenzor mindhárom főinvariánsától, hanem csak két (esetleg egy) főinvariánsától függ. Ugyanakkor a feladat megfogalmazható tisztán matematikai szempontból is. Ez a következő.

Adott az s függvényre az alábbi három parciális differenciálkifejezés:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial s}{\partial x_3}, \quad (2.1)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3} \left(\frac{\partial s}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial s}{\partial x_2} \right), \quad (2.2)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3} \frac{\partial s}{\partial x_2}. \quad (2.3)$$

Keressük azokat az általános feltételeket, amikor pl. f_3 kifejezhető f_i ($i = 1, 2$) segítségével, $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$, vagy hasonló összefüggés áll fenn az indexek ciklikus permutációja esetén.¹

3 A KONTINUUMMECHANIKAI HÁTTÉRŐL: KÉT, VAGY HÁROM PARAMÉTER?

Jelen pont alapvetően a benyújtott pályamű 7.3. pontján alapul; (lásd Lámer (2007/a), pp. 125–127), de az az óta elvégzett vizsgálatok alapján az akkori álláspontunkat finomítottuk.

A kitűzött feladat kontinuummechanikai háttere a kiírás egy megjegyzésében van (jól) elrejtve. Abban a mondatban, amelyben az az állítás van, hogy a Lamé-féle paraméterek nem felelnek meg a hiperelasztikusság (potenciálból származtathatóság) követelményének. Mire gondolunk?

A feszültség-alakváltozás összefüggés matematika háttérének vizsgálata során több általános megfontolás tehető. Most kettőt emelünk ki.

Ez egyik, a régebbi, megfontolás a következő: legyen adott a feszültségi és az alakváltozási tenzor. Ezek legáltalánosabb kapcsolatát egy negyedrendű tenzor adja meg, ahol a negyedrendű tenzor elemei függhetnek a független változóktól. A negyedrendű tenzonnak 81 eleme van. Már az a tény, hogy a feszültségi és az alakváltozási tenzorok szimmetrikusak, a 81 elemet 36-ra redukálja (Cauchy-féle elmélet). Ha az alakváltozási energia létezését feltételezzük, akkor csak 21 független elem létezik (Green-féle elmélet). Teljes izotrópia esetén a független együtthatók száma értelemszerűen háromra, illetve kettőre csökken.

A másik, kicsivel újabb keletű megfontolás szerint, ha adott a feszültségi és az alakváltozási tenzor, és az elsőt a második sorfüggvényeként állítjuk elő, akkor – figyelembe véve a Cayley–Hamilton-tételt – a feszültségi tenzor az alakváltozási tenzor nulladik, első és második hatványainak összegeként áll elő úgy, hogy az együtthatók már csak az alakváltozási tenzor főinvari-

¹ Mivel a feladat (lásd az (1-3) egyenletrendszer) nem rendelkezik ciklikus szimmetriával, ezért a ciklikus permutációval bíró megoldás feltételezése megalapozatlannak tűnik.

ásainak a függvényei. Ekkor a független együtthatók (együtthatófüggvények) száma – a három összetevőnek megfelelően, és az izotrop anyagra hiperrugalmasságot feltételezve – három.

A kérdés az, hogy most három, vagy két paraméterrel lehet a legáltalánosabban – izotrop, hiperrugalmas anyagot feltételezve – a feszültségi és az alakváltozási tenzorok kapcsolatát jellemezni.

A megoldást a feltételek pontos vizsgálata adja. Először tekintsük a „hagyományos”, vagy „megszokott” gondolkozásmódot.

Az izotrop, hiperrugalmas anyagokra legáltalánosabb formában felírt feszültség-alakváltozás összefüggés abból a feltevésből indul ki, hogy a feszültségi és az alakváltozási tenzorok közötti kapcsolatban mindkét tenzor csak lineáris taggal szerepel. Tehát nem is vizsgálja, hogy lehet-e például kvadratikusan, vagy annál magasabb hatványon az alakváltozási tenzor. Megjegyezzük, hogy az izotrópia fennállásának megkövetelése egyenértékű azzal, hogy a két tenzor főtengelei egybeesnek.

Ennek kapcsán egy megjegyzés kívánczik ide. Amennyiben az anizotrop rugalmas/hiperrugalmas anyagokra legáltalánosabb formában a feszültség-alakváltozás összefüggés felírásakor abból a feltevésből indulunk ki, hogy a feszültségi és az alakváltozási tenzorok közötti kapcsolatban az alakváltozási tenzor lineáris és kvadratikusan taggal szerepel, akkor elvben két 3/2 elemű együtthatómátrix-szal kell számolni. Ha az izotrópia feltételét vizsgáljuk mindkét együtthatómátrixra külön-külön, akkor – elvben – $2 \times 3/2 \times 2$ független együtthatót fogunk kapni. Ugyanakkor két tényt kell szem előtt tartani. Az egyik az, hogy egy tenzor és négyzete ugyanazzal a transzformációval hozható diagonális alakra. (Ez triviális, ugyanis ha $\mathbf{D}_A = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$, akkor a $\mathbf{D}_{A^2} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = (\mathbf{D}_A)^2$.) A másik, hogy a tenzor négyzetének a főinvariánsai egyértelműen meghatározhatók a tenzor főinvariánsaival ($I(\mathbf{A}^2) = I(\mathbf{A})^2 - 2II(\mathbf{A})$, $II(\mathbf{A}^2) = II(\mathbf{A})^2 - 2III(\mathbf{A}) \cdot I(\mathbf{A})$, $III(\mathbf{A}^2) = III(\mathbf{A})^2$). Ez azt sugallja, hogy ez esetben is csak három/két paraméter lesz a feszültség-alakváltozás kapcsolatban.

Egy tenzornak egy másik tenzor szerinti kifejezése eleve azon a feltevésen alapul, hogy a két tenzor „koaxális”, azaz a főirányai azonosak, valamint, hogy az egyik tenzornak a másik tenzorral való egyértelmű kifejezéséhez szükséges (és elégséges) az egységtenzor, a „bázisnak” vett tenzor, és annak négyzete. (Maga a Cayley–Hamilton-tétel azt mondja ki, hogy magasabb hatványra nincs szükség.) Ebben az összefüggésben három „független” együttható(függvény) jelenik meg, ezek a tanulmányban is szereplő f_i függvények.

Ebből viszont az következik, hogy a kétféle úton felállított feszültség-alakváltozás összefüggés között annyi a különbség, hogy az egyik az alakváltozási tenzort lineáris formában, a másik lineáris és kvadratikusan formában veszi figyelembe. Ahhoz, hogy a kettő között kapcsolatot találjunk, éppen a kvadratikusan tag együtthatóját kell nullának választani. Azaz nem azt kell vizsgálni, hogy hogyan lehet a három f_i függvény között kapcsolatot találni.

Ennek kapcsán érdemes kitérni arra, hogy a rugalmasság fogalmát jelentős mértékben pontosította a szakirodalom az elmúlt ötven, vagy inkább száz év alatt. A rugalmasság alapfogolata, hogy csak az alakváltozástól függ, és a terhelési görbével egybeesik a tehermentesítés görbéje (ha a két folyamat ugyanúgy paramétereztük). Ennél általánosabb fogalom, a hiporugalmasság, amely a feszültségtenzor időbeli deriváltjáról követeli meg, hogy az csak az alakváltozás sebességtenzorával legyen kifejezhető. Végül a rugalmasság fogalmának szűkítése a hiperrugalmasság, amely már a potencialitás meglétét is megköveteli. Ez utóbbi szükséges és elégséges feltétele az ETTE 1. sz. feladatában megfogalmazásában szereplő (2) összefüggés (itt éppen az entrópiát, mint potenciált alkalmazva). Amit érdemes megjegyezni: hogy rugalmas testek esetén az izotrop anyagállandók száma három, hiperrugalmas testek esetén kettő. Azaz, már amikor anizotrop anyagról izotrópra áttérünk, és különböző feltételeket alkalmazunk, akkor rejtve a rugalmas, vagy hiperrugalmas anyagról beszélünk. A hiperrugalmasság a rugalmasságon túl a potencialitás teljesülését is megköveteli, de nem követeli meg sem azt, hogy a feszültség-alakváltozás lineáris, sem azt, hogy kvadratikusan legyen.

Megjegyzés: anizotrop anyagra Cauchy-féle klasszikus rugalmas test anyagállandóinak a száma 36, a Green-féle, a hiperrugalmasságot alapul vevő lineáris elméletben az anyagállandók száma 21. Azaz itt fennáll a szimmetria az anyagállandókban. A hiperrugalmasság feltételét ez esetben az anyagállandók szimmetriája adja; (lásd Truesdell–Noll (1965), pp. 151.), és a következő oldalak, és csak potenciál alkalmazása esetén kapunk integrálhatósági feltételeket.

Ezt követően vizsgáljuk meg az érvelések egy-két rejtett feltevését, illetve kapcsolatát a fizikai valósághoz.

A feszültség-alakváltozás közötti kapcsolat elméletileg lehetséges alakjai vizsgálatának egyik „sarokköve”, hogy milyen matematikai objektumot tekintünk a feszültség és milyet az alakváltozás leírására, vagy másképpen megfogalmazva, modellezésére. Amíg a feszültségi állapot leírásra használatos tenzorok kiválasztásában jelentős különbség nem áll fenn (magyarán elviekben egyféle feszültségtenzor létezik, még ha a felírására használatos koordináta-rendszer(ek) megválasztásban nagyszámú lehetőség áll is fenn), addig az alakváltozás jellemzésére használatos tenzorok már elviekben is különböznek egymástól, amennyiben az eltolódás gradienstenzorát, annak „négyzetét”, vagy más, például logaritmikus alakváltozási tenzort vesznek figyelembe. A vizsgálat másik sarkköve, hogy a feszültség-alakváltozás összefüggés (a feszültségre rendezve) az alakváltozásban lineáris, vagy sem, és ami ezzel analóg probléma, hogy az alakváltozások kicsik (infinitézimálisak), vagy nagyok (végesek). Végül, de nem utolsó sorban említendő, hogy a vizsgálatok teljes mértékben elméletiek, ha úgy tetszik, matematikaiak, mert a kísérleti eredmények és az elvégzett kiterjedt matematikai vizsgálatok közötti kapcsolat ismertetése többnyire elmarad. Az világos, hogy ha lineáris az elmélet, akkor izotrop, hiperrugalmas testek esetében két paraméter szükséges és elégséges az anyagi viselkedés jellemzéséhez. Ha nem lineáris – ahogy azt fentebb ismertettük –, három anyagállandót várunk; ezek tulajdonságainak tisztázásában segít(het) az integrálhatósági egyenlet megoldása (vagy legalábbis a vizsgálata).

A kontinuummechanikában a vizsgálódásokat a folytonosságot feltételezve végezzük. Korábbi tanulmányainkban rámutattunk arra, hogy a folytonosság feltétele mellett, az alakváltozás (bármely szakaszosan folytonos görbe hosszának relatív megváltozása) csak kis alakváltozásokra értelmezhető, ekkor a feszültség-alakváltozás összefüggés értelemszerűen lineáris; Lámer (1985, 1989, 1990, 1992, 1992-93). Az újabb tanulmányainkban arra mutattunk rá, hogy a folytonosság feltételezése esetén fizikailag csak kis alakváltozások értelmezhetők, a nagy alakváltozások nem topológikus leképezésekkel, hanem átrendeződésekkel írhatók le; Lámer (2000, 2003a, 2003b, 2006, 2007b). Ez esetben viszont kérdéses, hogy a folytonos leírásmód mellett értelmezett alakváltozási tenzorok a fizikailag lezajló jelenséget modellezzék-e, vagy sem, ha igen, milyen feltételekkel és milyen pontossággal. Megjegyezzük, hogy átrendeződés esetén a feszültségtenzort is újra kell definiálni.

Ennek fényében nem zárható ki annak lehetősége, hogy a keresett együtthatók száma kettő, és hogy az integrálhatósági feltételek a stabilitás vizsgálatában, illetve néhány mérési eredményből további, fizikailag lehetséges paraméterérték meghatározásában fognak szerepet játszani.

Másképpen megfogalmazva (lásd Lámer (2007a) pp. 126-127), a kitűzött feladat két matematikai elv találkozásából született: az egyik a feszültség-alakváltozás összefüggésének matematikailag lehetséges legáltalánosabb kifejezése, mint két másodrendű tenzor közötti kapcsolat a Cayley–Hamilton-tétel fényében, a másik a feszültségtenzor kifejezése az entrópia (szabad energia, alakváltozási energia, vagy valamilyen más potenciálfüggvény) alakváltozás szerint vett deriváltjai segítségével. Mindkettő matematikai konstrukció. Nem látszik, hogy hogyan kapcsolódik a fizikai jelenséghez, pontosabban az alakváltozáshoz és a feszültséghez. Az ETTE 1. sz. feladatára benyújtott pályaműben elvégzett számítások szerint ez irányból – az integrálhatósági feltételek integrálásából – a feszültség-alakváltozás kapcsolatra nem fog fény derülni.

4 AZ INTEGRÁLHATÓSÁGI FELTÉTELEKRŐL: TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

Az izotrop, hiperelasztikus² feszültség-alakváltozási összefüggés (a szerző szerint) legelegánsabb levezetését Kirchhoff adta meg. (Az eredeti publikációt nem állt módomban fellelni, ismereti Papkovics (1939), pp: 94-95.) Kirchhoff az azonos tengelyű mátrixok azonosságát a főinvariánsok szimmetriatulajdonságaiból határozza meg, és vezeti le, hogy két független paraméter létezhet. Megjegyzés: mivel a potencialitást eleve feltételezi, ezért hiperrugalmas testekről van szó és két paraméternél többet nem is „kaphat”.

² Kirchhoff még nem nevezte hiperrugalmasnak, ő egyszerűen feltételezte, hogy létezik az alakváltozási energia függvénye (potenciálja).

Az izotrop, rugalmas viselkedés matematikai hátterének kidolgozása több mint száz évre nyúlik vissza. Az áttekintés alapvetően Truesdell és Noll (1965) könyvén alapul. Továbbá az áttekintés igen szűk problémára, az integrálhatósági feltételre vonatkozik.

A feszültség ($\mathbf{F}$) az alakváltozással ($\mathbf{A}$) izotrop, rugalmas anyagra a legnagyobb általánosságban a

$$\mathbf{F} = f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{A} + f_3 \mathbf{A}^2, \quad (4.1)$$

alakban írható föl, ahol az f_i ($i = 1, 2, 3$) együtthatók (a válaszfüggvények) az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor függvényei. Ezek a függvények – értelemszerűen – kifejezhetők az alakváltozási tenzor invariánsaival (id. mű, p. 140). Ugyanitt, az 1. lábjegyzet szerint, a fenti felírásmódot először Reiner³ alkalmazta. A felírás azon alapul, hogy az $\mathbf{F}$ -et az $\mathbf{A}$ hatványaival „ábrázoljuk”, de a Cayley–Hamilton-tétel értelmében a tenzor rendjénél magasabb hatványok kifejezhetők a bázisul választott (általában 0, 1, 2, vagy 0, 1, –1 hatványokat választjuk) hatványok lineáris kombinációjával. Részletesebben lásd, pl. Reiner (1958). Megjegyezzük, hogy a nem rugalmas, azaz alakváltozási tenzor idő szerinti deriváltjától függő, ezzel analóg, véges ábrázolás is ismert. Ehhez az általánosított Cayley–Hamilton-tétel alkalmazása szükséges, lásd pl. Freudental-Geiringer (1958). Ugyanebben a lábjegyzetben Truesdell és Noll utalnak arra, hogy mások, pl. Richter, Manacorda, Signorini, hasonló eredményre jutottak. Végül megemlítik, hogy izotrop, rugalmas anyagra ezek az összefüggések egyedi együtthatók esetén, amelyek a hiperrugalmas anyagra vonatkoznak, már 1894-ben ismertek voltak. (Itt nem adják meg a szerző nevét, de más lábjegyzetből kiderül, hogy J. Finger.)

Izotrop, hiperelasztikus anyagok esetében a fenti összefüggésekben az együtthatók „explicit” formában felírhatók: a test állapotát leíró, az alakváltozási energiáját magába foglaló funkcionál feszültség szerinti parciális differenciálhányadosával. Ekkor valamely

$$f_1 = c A_3 \frac{\partial F}{\partial A_3}, \quad (4.2)$$

$$f_2 = c \left(\frac{\partial F}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial F}{\partial A_2} \right), \quad (4.3)$$

$$f_3 = -c \frac{\partial F}{\partial A_2}. \quad (4.4)$$

típusú összefüggésre jutunk, ahol F a (túlzott általánosság miatt homályosan megfogalmazott) funkcionál, amely lehet az alakváltozási energia, a belső energia, a reverzibilis energia, vagy az entrópia; ennek függvényében a c együttható lehet 2ρ , $-2\rho T$, stb. Ezek az összefüggések a F funkcionálra nézve parciális differenciálegyenlet-rendszert alkotnak. Ezek integrálhatósági feltételei felírhatók az

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_2} + A_3 \frac{\partial f_2}{\partial A_3} = 0, \quad (4.5)$$

$$A_3 \frac{\partial f_2}{\partial A_2} - A_1 \frac{\partial f_1}{\partial A_2} - \frac{\partial f_1}{\partial A_1} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_2} + \frac{\partial f_3}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial f_3}{\partial A_2} = 0. \quad (4.7)$$

alakban. Ez a szükséges és elégséges integrálhatósági feltétel ahhoz, hogy az izotrop, rugalmas anyag hiperrugalmas legyen (id. mű, pp. 317–318). A 318. oldal 1. lábjegyzete szerint az f_i

³ Reiner, M.: Elasticity beyond the elastic limit. Amer. J. Math. **70**, 433–446

együtthatókra vonatkozó (2-4) összefüggéseket először Finger⁴ vezette le. Ugyanitt, a 2. lábjegyzet szerint a (5-7) összefüggésekhez hasonló összefüggéseket Gol'denblat⁵ írta föl először főinvariánsokat alkalmazva. A fentebb felírt formában először Truesdell⁶ vezette le. Ezt követően már áttérnek a kísérletekkel kapcsolatos megállapításokra.

Amennyiben kellő figyelemmel tekintettük át a könyvet (541 oldalról van szó), az integrálhatósági feltételek integrálásáról nem esik szó benne.

Megjegyzés: Reiner (1958) és Freundental-Geiringer (1958) műveiben a (1) típusú összefüggések levezetésével és alkalmazásával kapcsolatban további adatok, illetve történeti megjegyzések olvashatók. Egyikük sem tekinti integrálhatósági feltételnek, és így az integrálásával sem foglalkoznak.

A történeti áttekintés után figyelmünket Gol'denblat munkássága felé fordítjuk. Két nagyobb munkájában Gol'denblat (1955, 1969) is foglalkozik a véges alakváltozásokhoz tartozó anyagi állandók kérdéseivel.

Először a Gol'denblat (1955) mű ide vonatkozó részét ismertetjük. Tekinti a termodinamika II. főtétele, és hogy a rugalmas anyagra a belső energia dQ/T kifejezése teljes differenciál, és ebből összefüggéseket vezet le a feszültségi és alakváltozási tenzorok két-két főinvariánsa között: az alakváltozást kicsinek tekinti, ezért a két tenzor között lineáris kapcsolatot tételez fel. A levezetett összefüggés parciális differenciálkifejezés (id. mű 169-170 old.).

Később, a X. fejezetben (pp. 197-222) az imént említett differenciálkifejezést más úton állítja elő. Majd az összefüggést parciális differenciálegyenletnek tekinti, és a karakterisztikák módszerével oldja meg. A megoldáshoz, természetesen, peremfeltételeket, a rendszerből adódóan, Cauchy-típusú kezdeti feltételeket „választ”. Az idézőjel oka az, hogy valójában, teljes általánosságban, ezeket a feltételeket nem ismeri, hiszen ezeket az adatokat kísérletekből kellene meghatározni. Ezen kísérletek elvégzésére tesz javaslatot, valamint jelzi, hogy ha ismert a „kezdeti feltétel”, akkor az anyagállandóknak a belső – értsd: mechanikai – állapottól való függése integrálás útján már meghatározható. Egy egyszerű viselkedésű anyagra példát is közöl (id. mű 220-222 old.).

Megjegyezzük, hogy ebben a műben a kérdést általánosságban (három invariánsra vonatkozóan) nem ismerteti. A saját tanulmányai között a Truesdell és Noll (1965) által említett cikk nem szerepel.

Másodszor a Gol'denblat (1969) mű ide vonatkozó részét ismertetjük. A könyv egyaránt foglalkozik a kis és a véges alakváltozásokkal, ez utóbbi az, ami minket érdekel. Megjegyezzük, hogy a kis alakváltozások esetén kisebb-nagyobb változtatásokkal a korábbi, a Gol'denblat (1955) könyvben írtakat ismétli meg. Tehát a figyelmünket a nagy alakváltozások felé fordítjuk.

A 18-21 oldalakon megjelenik az (1) képlettel analóg összefüggés, szintén a Cayley-Hamilton-tételre hivatkozva. A 95-99 oldalakon ismét felírja az (1) összefüggést, hivatkozik Reiner Reológia című könyvére (orosz kiadásban, nem tudni, hogy minek is a fordítása, vélhetően az Encyclopedia of Physics VI. kötetében szereplő Rheology című műről lehet szó). Ekkor bevezeti a vegyes, a feszültségi és az alakváltozási tenzorok egyidejű invariánsait, és ezekre nézve írják fel összefüggéseket. Itt hivatkozik egy 1950-ben megjelent könyvére, de Truesdell és Noll (1965) által említett cikke (itt) nem hivatkozik.

A könyv 224-230 oldalain a feszültség-alakváltozás egyidejű invariánsaira, és az alakváltozási tenzor három főinvariánsára nézve három parciális differenciálkifejezést ír fel. Megmutatja (pontosabban csak utal rá), hogy a háromból egy a másik kettővel kifejezhető. Ahhoz, hogy teljes differenciálegyenlet-rendszernek tekinthesse, az állapotegyenletet javasolja figyelembe venni; ugyanis a szabad energia az alakváltozási tenzor főinvariánsaira nézve nemlineáris differenciálegyenlet. Ekkor három parciális differenciálegyenletet nyer a három főinvariánsra. És ekkor adottnak véve valamelyik három (fő)invariáns, a másik három (fő)invariáns egyértelműen meghatározható a karakterisztikák módszerével, ha az állapotot leíró felület peremén a Cauchy-

⁴ Finger, J.: Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen. Sitzsberg. Akad. Wiss. Wien (IIa) **103**, 1073-1100

⁵ Gol'denblat, I.I.: On a problem in the mechanics of finite deformation of continuous media [in Russian] C.R. Dokl. Akad. Sci. SSR **70**, 973-976

⁶ Truesdell, C.: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. J. Rat. Mech. Anal. **1**, 125-300

féle feltételek ismertek. A peremfeltételeket és az állapotegyenleteket fizikai kísérletekből javasolja meghatározni.

Megjegyezzük, hogy ebben a részben hivatkozik a saját tanulmányára, amelyet Truesdell és Noll (1965) is említett.

Ki kell térni arra, hogy itt látszólag kétféle megközelítéssel állunk szemben. Truesdell és Noll (1965) a felírt (5-7) egyenleteket a hiperrugalmasság szükséges és elégséges feltételének tartja. Ezen feltétel teljesülése mellett a rugalmas anyag potenciális, azaz létezik rugalmas potenciál, a rugalmas energia tárolódhat az anyagban, és az, mármint a rugalmas energia, *tökéletesen*, veszteség nélkül, visszanyerhető. Meg kell jegyezni azt is, hogy magát az egyenletrendszert nem vizsgálják; a céljuk az, hogy megállapítsák, milyen feltételek mellett lesz a rugalmas test hiperrugalmas. Erre a kérdésre még visszatérünk. Gol'denblat (1955, 1969) az általa nyert egyenleteket nem a hiperrugalmasság feltételének tekinti, hanem olyan matematikai modellnek, amely a hat invariáns által kifeszített térben három ismertében, és másik három kezdeti értékének ismertében meghatározza a három ismeretlen mennyiséget az állapotegyenlet értelmezte altérben. Azaz olyan matematikai módszert dolgozott ki, hogy kevés fizikai kísérlet esetén matematikai számításokkal lehessen következtetni az anyagállandók értékeire más fizikai paraméterek esetén. Egyszerűbb esetekben meg is oldja.

Álláspontunk szerint a kétféle megközelítés végső soron azonos. Az integrálhatósági feltétel teljesülés esetén a (2-4) egyenletek bármelyikét integrálva megkapjuk a potenciálfüggvényt. (Ez így nem teljesen pontos, de ha az integrálással velejáró integrálási állandók meghatározását is beleértjük az integrálásba, akkor lesz kellően pontos a megfogalmazás.) Gol'denblat a reverzibilitás feltételezésével – azaz egyfajta potencialitás meglétét tételezi fel – nyert differenciálegyenletet integrálja. Azaz hallgatólagosan feltételezi, hogy a rendszer integrálható.

Két kérdést kell érinteni. Az egyik a hiperrugalmasság feltétele. Truesdell és Noll (id. mű, p. 318) a (5-7) (típusú) integrálhatósági feltételek felírása után megjegyzi, hogy ezek a korábban felírt, a hiperrugalmasság létezésének szükséges és elégséges feltételeinek speciális esete.

Amikor a hiperrugalmasságot a válaszfüggvény speciális alakjával adják meg (bevezetik az alakváltozási-energia függvényt, amelynek az alakváltozás szerinti parciális deriváltjaitól függ a válaszfüggvény, id. mű, p. 302), akkor az integrálhatósági feltételt a

$$A_{k m}^{\alpha \beta} = A_{m k}^{\beta \alpha} \quad (4.8)$$

speciális esetének tekintik. Ezen együtthatók definíciója viszont:

$$A_{k m}^{\alpha \beta} = \rho_R \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_{,\alpha}^k \partial x_{,\beta}^m} . \quad (4.9)$$

Utalva arra, hogy, ha az egyik sorrendbe véve a vizsgált pont egy környezetében létezik és folytonos a vegyes parciális derivált, és a vizsgált pontban a másik sorrendben vett parciális derivált létezik, akkor a parciális deriválás értéke a deriválások sorrendjétől nem függ (lásd Korn-Korn (1975), p. 104.). A feltétel elég általános, a számításokhoz kell mind a kétféle módon számított vegyes, második derivált és azok folytonosságának létezése. Ez esetben, viszont az alakváltozási energia feltételezése – létezése – megköveteli, hogy a rugalmas anyag automatikusan hiperrugalmas legyen.

Amikor Truesdell és Noll a rugalmasságot tárgyalják, bevezetik a rugalmas együtthatókat, mint egy negyedrendű tenzor elemeit (id. mű p. 131). Az első és a második indexpáron belül az indexek felcserélésére nézve invariáns a rugalmas együtthatók tenzora, mert mind a feszültségi, mind az alakváltozási tenzor szimmetrikus (uo.). Megmutatható, hogy, ha a feszültség az alakváltozástól függő funkcionál – például az alakváltozási energiafüggvény – parciális differenciálhányadosaként értelmezhető, akkor a negyedrendű tenzor az első és a második indexpár felcserélésére nézve is invariáns, azaz azokban is szimmetrikus.

Ez anizotrop testek esetében azt jelenti, hogy a rugalmas testek esetén 36 (Cauchy-féle elmélet), hiperrugalmas, azaz potenciállal bíró rugalmas testek esetén 21 (Green-féle elmélet) a független anyagállandók száma (id. mű 309-310 oldalak).

5 AZ INTEGRÁLÁS EGY LEHETSÉGES MÓDJÁRÓL

Az ETTE 1. sz. feladatára a szerző egy pályaművet nyújtott be „Az integrálhatósági feltételekről az izotrop, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve” címmel. A dolgozat az ETTE honlapján megtalálható.

A pályamű alapgondolatát, és az elért eredmények összefoglalását szó szerint idézzük. Ebben egy helyen teszünk kivételt: a pályaműben szereplő „legáltalánosabb” kifejezés használatát mellőzzük, mert csak bizonyos feltételek mellett igaz ez a kitétel, tehát nem a legáltalánosabb.

Először a 2.1. pont alapján, Lámer (2007a) pp. 6-8, ismertetjük a kitűzött feladatot; az egyenletek eredeti számozását megtartottuk.

5.1 A kitűzött feladat, mint az (1-3) egyenlet integrálása

Mielőtt a kitűzött feladat megoldásához kezdenénk, először megvizsgáljuk az (1-3) egyenletrendszert. Ez egy elsőrendű, parciális differenciálegyenlet-rendszer. Ezen egyenletrendszer kapcsán feltehető az a kérdés, hogy mi az integrálhatóság feltétele.

Itt és a továbbiakban az $f_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$ függvények argumentumait nem írjuk ki; ahol az argumentumokat nem írjuk ki, ott mindig mindhárom argumentumtól való függést tételezzük fel. Megjegyezzük, hogy ez a konvenció az s függvényre is vonatkozik.

Az integrálhatósági feltétel meghatározásához felírjuk az s függvény első parciális deriváltjait. Ennek során a (2) egyenletből az x_2 szerinti parciális deriváltat kiküszöböljük.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = x_3 f_3, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_3} = f_1. \quad (2.6)$$

Felírjuk az s függvény vegyes, második parciális deriváltjait, mint (4-6) integrálhatósági feltételeit.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_3 f_3, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} x_3 f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} f_1, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3). \quad (2.9)$$

Tehát az (1-3), azaz a (4-6) egyenletrendszer integrálhatósági feltételei a (7-9) összefüggések. Egyúttal ezek azok a legáltalánosabb összefüggések, amelyek az f_i , $(i = 1, 2, 3)$ függvények között fennállnak-fennállhatnak. Ugyanakkor ezek az összefüggések nem teszik lehetővé, hogy az f_i , $(i = 1, 2, 3)$ függvények közül egyet a másik kettővel kifejezzük. Ennek az az egyszerű oka, hogy a (7-9) egyenletrendszerben nem szerepelnek az f_i , $(i = 1, 2, 3)$ függvények összes parciális differenciálhányadosai.

A továbbiakban két lehetőség közül választhatunk. Az egyik, hogy valamilyen *ad hoc* feltevessel keresünk egy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ típusú összefüggést; ezt nem kívánjuk megtenni. A másik, hogy megkeressük a (7-9) egyenletrendszer legáltalánosabb megoldását, majd azt követően vizsgáljuk meg egy $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ típusú összefüggés létezésének a feltételeit. Ezt az utat választjuk.

Tehát a következő lépésben felírjuk az f_i , $(i = 1, 2, 3)$ függvények egyes vegyes, második parciális differenciálkifejezéseit, mint (7-9) integrálhatósági feltételeit.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} x_3 f_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3)}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} x_3 f_3, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 x_3 f_3}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} (x_3 f_2 - x_1 x_3 f_3) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1. \quad (2.12)$$

A (10-12) egyenleteket áttekintve megállapíthatjuk, hogy a (10), (11) és (12) egyenlet rendre a (7), (8), illetve a (9) egyenlet x_3 , x_1 , illetve x_2 szerinti parciális deriváltja. Következésképpen a (7-9) egyenletek (10-12) integrálhatósági feltételei megegyeznek a kiinduló, azaz a (7-9) egyenletekkel. Másképpen fogalmazva, a (10-12) egyenletek nem adnak újabb összefüggéseket az f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvények parciális differenciálhányadosaira nézve. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyrészt maga a (7-9) egyenletrendszer integrálható, másrészt, hogy a (7-9) egyenleteket kielégítő f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvények esetén a (4-6), tehát az (1-3), egyenletrendszer egyértelműen integrálható.

Tehát kizárva egy ad hoc $f_3 = \Phi_3 \circ (f_1, f_2)$ összefüggés keresését-vizsgálatát, valamint az integrálhatóságra vonatkozó fejtegetéseket figyelembe véve, az ETTE 1. sz. feladatának más értelmezést adunk.

A kitűzött feladatot elsődlegesen a (7-9) egyenletek integrálásaként fogjuk fel. Ennek megfelelően nem az f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvények közötti összefüggés(ek)e)t keressük, hanem integráljuk a (4-6) egyenleteket, azaz azt határozzuk meg, hogy hogyan függ az s függvény az f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvényektől. Megjegyezzük, hogy nem kizárt, hogy eközben az f_i , ($i = 1, 2, 3$) függvények közötti összefüggések is kiadódhatnak. Amennyiben sikerül a (7-9) egyenletrendszert integrálni, úgy az alapján az s függvény a (4-6) egyenletrendszerből egyértelműen meghatározható.

Mielőtt rátérnénk a (7-9) egyenletrendszer integrálására, egyrészt a rendszer struktúráját, másrészt néhány egyszerűbb struktúrájú megoldást vizsgálunk meg. A következő pontban a differenciálegyenlet-rendszer „hiányos” voltából adódó „független” megoldásokat vizsgáljuk. A 3. fejezetben a részleges – tehát csak két, vagy egy f_i függvényt magába foglaló, illetve csak két változótól függő – megoldásokat vizsgáljuk. Az egy-, illetve kétváltozós megoldás struktúráit a 4. fejezetben tekintjük át. Az általános integrálást az 5. fejezetben végezzük el.

Ezután áttekintjük az elért eredményeket, azaz az Összefoglalás tartalmát (lásd Lámer (2007a), pp. 127-130). Megjegyezzük, hogy a bírálóknak megfelelően a „legáltalánosabb” kifejezést a szövegből kivettem, illetve időző jelbe tettem.

5.2 Az elért eredmények

Az ETTE 1. sz. pályázatára benyújtott pályaműben az integrálhatósági feltételek integrálásával foglalkoztunk. Maga a feladat az egyensúlyi entrópia olyan alakjának meghatározása, amely lehetővé teszi, hogy a feszültségtenzort az alakváltozási tenzornak nem három, hanem két főinvariánsával parametrizálhassuk. A tanulmányban ezt a feladatot felváltottuk az alakváltozási tenzor főinvariánsaival parametrizált f_i ($i = 1, 2, 3$) függvényekre vonatkozó, mint az entrópia egyértelmű meghatározásának integrálhatósági feltételeiként előállított, parciális differenciálegyenletek integrálásával.

Az így értelmezett feladat megoldásához az integráláson kívül a függvényegyenletekre vonatkozó eljárásokat is fel kellett használni. Ennek a keretén belül a figyelembe vett függvények körét szűkítettük: csak összeg és szorzat alakban kerestük a megoldást.

A tanulmányban kitűzött parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását több, különféle szempont szerint állítottuk elő. Ennek során az alábbi eredményeket értünk el.

Meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer szabad integrálási függvényeit.

Értelmeztük a részmegoldások fogalmát, mint a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer olyan megoldását, amelyben

- vagy nem három független változó szerepel, hanem csak kettő (vagy egy),
- vagy nem három ismeretlen függvény szerepel, hanem csak kettő (vagy egy),

– vagy ugyan szerepel mindhárom függvény, de a három függvény két csoportra esik szét.

A részmegoldásokhoz meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásait.

Megkerestük a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer megoldásait egy- és kétargumentumú függvények összegeként értelmezett egyedi bázisválasztással. Külön vizsgáltuk azokat az eseteket, amikor a bázisfüggvények x_3 -mal osztva vannak.

Meghatároztuk a vizsgált differenciálegyenlet-rendszer „általános”, azaz szorzat alakban felvett megoldásait, mint két- és egyargumentumú függvények szorzatait.

A fenti három feltétel mellett teljes megoldást adtunk. A megoldásokat a lehető legáltalánosabb formában adtuk meg⁷. Ugyanakkor az integrálás során meghatároztunk néhány konkrét algebrai függvényt is, mint partikuláris megoldást.

Egy példán megmutattuk, hogy az egyenletrendszer egy részének létezik megoldása a hatványfüggvények körében (is).

A nyert megoldásokat megvizsgálva megállapítható, hogy azok között nincs olyan szerkezetű, amelyben egy f_i függvény kifejezhető lenne két másik segítségével, ellenben a „legáltalánosabb”, azaz a szorzatalakban felvett megoldások szerkezete azonos: létezik egy kétváltozós és egy egyváltozós függvények szorzataként értelmezett függvény, amelynek a különböző parciális differenciálkifejezései segítségével mindhárom f_i függvény egyértelműen meghatározható. A kétargumentumos megoldások alapvetően csak két f_i függvény meghatározását teszik lehetővé, bár van olyan is, amely mindhárom f_i ($i = 1, 2, 3$) függvényt meghatározza. Az egyargumentumos megoldások alapvetően partikuláris megoldások.

Megvizsgáltuk a különbözőképpen kapott megoldásokat. Megmutattuk, hogy az „általános”, szorzat alakban felvett megoldásból minden részmegoldás és egyedi megoldás megkapható. Rámutattunk a különböző megoldások közötti kapcsolatokra is. Ki kell hangsúlyozni, hogy az x_3 -mal való szorzás, illetve, hogy csak az f_1 és f_3 között van összefüggés, néhány megoldás esetében két változat létezését teszi lehetővé.

Külön foglalkoztunk azzal esettel, amikor egy egyenlet önmagában a benne szereplő egyik függvényre nézve differenciálegyenletnek tekinthető, és megoldható. Ez esetben ugyanis nem csak, hogy az egyik függvény kifejezhető a másik függvény parciális differenciálhányadosai segítségével, hanem kvadratúrában is felírható az összefüggés. Ez az eljárás lehetővé teszi az „általános” megoldás mellett partikuláris megoldások előállítását is. Ennek kapcsán mutattuk meg, hogy a megoldás előállítható integrális, vagy differenciális formában is, továbbá ez lehetővé teszi néhány integráltranszformáció felírását is.

A tanulmányban az összes előállított f_i ($i = 1, 2, 3$) függvényekhez meghatároztuk az egyensúlyi entrópiát. Ennek során beláttuk, hogy a legáltalánosabb megoldások esetén az egyensúlyi entrópia kifejezhető egy háromváltozós függvény segítségével. Ugyanakkor ez a függvény közvetlenül nem azonos egyik f_i ($i = 1, 2, 3$) függvénnyel sem, hiszen ennek a függvénynek a különböző parciális differenciálkifejezései határozzák meg az f_i ($i = 1, 2, 3$) függvényeket.

A nyert megoldások szerkezete azonos; sőt megegyezik az eredeti feladat szerkezetével. Azaz formailag új információt a megoldás nem tartalmaz. Ezért megvizsgáltuk általánosságban egy s függvény három parciális differenciáljára vonatkozó egyenletrendszert. Ennek során az egyes parciális differenciálhányadosokat a három f_i függvény tetszőleges lineáris kombinációjaként írtuk fel, és oldottuk meg a feladatot. A megoldás struktúrája megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Ezt követően meghatároztuk azon függvényegyütthetők körét, amelyekre az f_i függvényekre vonatkoztatott integrálhatósági feltételek felírhatók, és megoldottuk a feladatot, és analóg eredményt kaptunk. Végezetül megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a három f_i függvény tetszőleges lineáris kombinációjában szereplő együtthetők az x_i változók tetszőleges függvényei. Az eddig követett úttól eltérő módszert alkalmazva meghatározható mind a három f_i függvény, mind az s függvény. Ez esetben is az f_i függvények szerkezete megegyezett a kiindulási parciális differenciálegyenlet-rendszer struktúrájával. Következésképpen megállapítható, hogy az ETTE 1. sz. kitűzött feladatának a tanulmányban adott megoldása elméletileg helytálló.

A matematikai háttér tanulmányozása során megállapítottuk, hogy az f_i függvények, és az s függvény szerkezetének alapstruktúráját az elsőrendű parciális differenciálok és csak azok jelen-

⁷ A pályamű a kvázilineáris, elsőrendű, parciális differenciálegyenletek általános megoldásait nem tartalmazza.

léte határozza meg. Sem az, hogy minden parciális derivált jelen van, sem pedig az, hogy az együttthatók konstansok, vagy, hogy azok az x_1, x_2, x_3 változók bármilyen függvényei, erre az alapstruktúrára nincsenek hatással. Erre az alapstruktúrára ráépül egy másodlagos szerkezet, ami viszont pontosan megegyezik az s parciális deriváltjait meghatározó függvények, illetve azok kombinációjának szerkezetével. Ezt a tényt is alapvetően az határozza meg, hogy a vizsgált differenciálegyenlet-rendszerben csak az elsőrendű parciális differenciáloknak csak első hatványai szerepelnek. (Mondhatnók, hogy lineáris kombinációi, de hozzá kellene tenni, hogy az együttthatóknak a független változóktól való függését nem zárjuk ki).

Megvizsgáltuk a kiírásban szereplő, és a megoldás permutációs tulajdonságra vonatkozó elvárását. Megmutattuk, hogy a kitűzött feladat alapvetően nem rendelkezik ciklikus szimmetriával, csak jelentős átalakítás után. Ezért a ciklikus megoldásra vonatkozó elvárást megalapozatlannak tartjuk.

A tanulmányban feltárt matematikai háttér ismeretében a ciklikusságnak nincs szerepe sem az f_i függvények, sem az s függvény szerkezetében. (A matematikai háttér ismertetése ez nem is meglepő.)

Megvizsgáltuk a kiírásban szereplő feladatot is. Megmutattuk, hogy teljes általánosságban nem sok esély van a kapott differenciálegyenlet megoldására, ha abból indulunk ki, hogy az s függvényre nézve az integrálhatósági feltételeknek fenn kell állniuk. Ettől eltérő utat is megvizsgáltunk: nevezetesen a feltételezett kapcsolatot felhasználva közvetlenül az s függvényre írtunk fel differenciálegyenletet. Ez az egyenlet teljes általánosságban megoldhatatlannak tűnik: egy egyenlet két ismeretlent tartalmaz.

Egy speciális esetben $-f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2$ – meghatároztuk mind a három f_i függvényt, és az s függvényt értékét összeg- és szorzatfüggvények esetében. Rámutattunk azokra a lehetséges kapcsolatokra, amelyek elvben az f_1 , az f_2 és az f_3 között fennállhatnak.

A kitűzött feladatra a válasz az, hogy

- az f_i függvények között fenn kell állniuk egy (5.71)⁸ típusú összefüggésnek,
- ehhez a (5.78)⁹ alatti s függvény tartozik,
- ennek a matematikai háttére az, hogy az f_i függvényeket egy s függvény elsőrendű parciális differenciáljainak „lineáris függvénykombinációjaként” állítottuk elő,
- az f_i függvények közötti bármilyen további kapcsolatot az f_i függvényekre megadott összefüggésekből levezetni nem lehet,
- az f_i függvények közötti bármilyen további kapcsolat megadása esetén az s függvénynek ehhez a kapcsolathoz tartozó „egyedi” tulajdonságai *meghatározhatók*.

Kitértünk a kontinuummechanikai háttérre is. Megmutattuk, hogy nincs ellentmondás az izotrop anyagokra tett feltevésen, illetve a Cayley–Hamilton-tételen alapuló feszültség-alakváltozás közötti összefüggés független együttthatóinak eltérő száma között (az elsőből kettő, a másodikból három), ugyanis az első feltétel eleve kizárja az alakváltozási tenzor kvadratikus tagját, így a két feltevés nem azonos.

6 AZ INTEGRÁLÁS EGY LEHETSÉGES MÁSIK MÓDJÁRÓL

Mint azt a kontinuummechanikai háttér ismertetésénél jeleztük, az integrálás feltétele mellett a kapott egyenletrendszer kiegészítve egy további egyenlettel, illetve Cauchy-féle feltételekkel integrálható differenciálegyenlet-rendszerként kezelhető. Ez Gol'denblat módszere. Igazából a célja az, hogy a kísérletek számát csökkentse. Ugyanis, ha ismert az állapotfüggvény, és az integrálhatósági feltétel, mint differenciálegyenlet, akkor ez utóbbi megoldása során meghatározzuk az állapotegyenlet által kijelölt felület minden egyes pontjához tartozó anyagi „állandókat”.

Az ETTE 1. sz. feladatára Tóth János is benyújtott egy pályaművet; Tóth (2007). Ő a megadott egyenleteket úgy tekintete, mint a tér egy tartományának megadását (leképezését) három paraméter (koordináta) függvényében. Az egyes paraméterek között meghatározta azokat a feltételeket, ami mellett a leképezést kétparaméteresnek lehet tekinteni (egy-egy pontban, illetve egy kellően kis környezetében). Ezzel egy másfajta megoldást adott az ETTE 1. sz. feladatára: megadta, hogy bizonyos feltételek mellett az állapotter egy pontjaiban, illetve azok egy ki-

⁸ Lásd Lámer (2007a), pp. 105-106

⁹ Lásd Lámer (2007a), p. 108

csiny környezetében, milyen feltételek mellett elegendő két együtthatófüggvény a test állapotának jellemzésére.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton mondok köszönetet Asszonyi Csabának, Matolcsi Tamásnak és Ván Péternek.

IRODALOM

- Freudenthal, A.M. – Geiringer, H. 1958. *Mathematical theories of the inelastic continuum*. In: Encyclopedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. VI. *Elasticity and plasticity*. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, pp. 229-433
- Гольденблат, И.И. 1955. *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*. ГИТТЛ, Москва
- Гольденблат, И.И. 1969. *Нелинейные проблемы теории упругости*. Наука, Москва
- Korn, G.A. – Korn, T.M. 1975. *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Lámer G. 1985. Notes on the Theory of Large Displacement with Small Strain = *Periodica Polytechnica* **29** (1-2) pp. 53-65
- Lámer G. 1989. A nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikája = Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában. II. Tudományos Találkozó 1989. *Előadások kivonatai*, Budapest I. kötet pp. 85-88
- Lámer G. 1990. *A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulásokat végző tökéletesen rugalmas héjak és rudak elméleteinek matematikai alapjai*. Kandidátusi értekezés. (Kézirat) Budapest
- Lámer G., 1992. A kis alakváltozások és a nagy elmozdulások geometriai kapcsolatáról = Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában. III. Tudományos Találkozó 1992. *Előadások kivonatai*, Budapest pp. 49-51
- Lámer G. 1992-93. A kis alakváltozások mellett nagy elmozdulást végző kontinuum kinematikájáról = *Építés-, Építészettudomány XXIII* (1-2) pp. 35-59
- Lámer G., 2001. Kinematikai szabadságfokok a klasszikus és az általánosított kontinuumokban; BME Háló: <http://www.me.bme.hu/esemenyek/szilszem/lamer.html>. Abstract: Mechanics of Solids 2000., BME.
- Lámer G. 2003a. Solid and soft body with and without structure = In: *Quasi-static deformations of particular materials*. Proceedings of QuaDMP'03 Workshop. 25-28 august 2003. Ed.: K. Bagi. P. Co. of BTU, Budapest pp. 159-166.
- Lámer G., 2003b. Large deformations: boundaries and possibilities in the mathematical descriptions = In: *Prediction and Simulation Methods in Geomechanics*. Proceedings of the International Workshop 14-15. october 2003. Ed.: F. Oka, I. Vardoulakis, A. Murakami & T. Kodaka. Technical committee 34. of ISSMGE, Athens pp. 117-120.
- Lámer G., 2006. „Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései” In: *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2006*. Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára 2. kötet] pp. 145-156.
- Lámer G. 2007a. Az integrálhatósági feltételekről az izotrop, hiperelasztikus testek egyensúlyi entrópiájára nézve. Kézirat, Budapest (Lásd az ETTE honlapján)
- Lámer G. 2007b. „Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései” In: *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2007*. Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtára 4. kötet] (jelen kiadványban)
- Папкович, П.Ф., 1939. *Теория упругости*. ОБОРОНГИЗ, Ленинград-Москва
- Reiner, M. 1958. *Rheology*. In: Encyclopedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. VI. *Elasticity and plasticity*. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg pp. 434-549.
- Tóth J. 2007. Az anyagtörvény egyszerűsítése. Kézirat, Budapest (Lásd az ETTE honlapján)
- Truesdell, C. – Noll, W. 1965. *The non-linear field theories of mechanics*. Encyclopedia of Physics. Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Springer, Berlin-Heidelberg-New York
- Ván P. – Asszonyi Cs. 2006. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye II. Az általános törvényszerűsések. In: *Izotrop kontinuumok anyagtörvénye*. Szerk. Asszonyi Cs., Műegyetemi Kiadó, Budapest [A Mérnökgeológia-Kőzetmechanikai Kiskönyvtára 3. kötet] pp. 25-87.