

Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései

Lámer Géza

Lámer és Lámer Kft. e-mail lamer@emma.hu

Debreceni Egyetem, AMTC MK, Építésmérnöki Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS: Az előadásban az anyagok folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdéseivel foglalkozunk. Ennek során áttekintjük az erő és a nyomaték, valamint a feszültség és a megoszló nyomaték értelmezését a Newtoni mechanika szempontjából, illetve a belső erők értelmezésének lehetőségeit a klasszikus kontinuumban, a rácskontinuumban, valamint a szemcsehalmozban. Megvizsgáljuk az ismeretlenek csoportosításának és a sorfejtésnek a lehetőségét és következményeit rácskontinuum esetén, és rámutatunk arra, hogy ez hogyan vezet el az általánosított -, illetve a kvázikontinuum fogalmához.

Kulcsszavak: anyagmodellezés, folytonos és diszkrét modellek, az anyagi pont, a kontinuum és a szemhalmaz mechanikája

1 BEVEZETÉS

Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének a kinematikai kérdéseivel a 2006. évi Konferencián foglalkoztunk. Ennek során áttekintettük a különböző alakváltozási mechanizmusok fizikai és matematikai leírását néhány egyszerű kísérlet alapján, mint síklapra tevés, lyukfúrás, helyi nyomás, rázás, hajtogatás. Ezen kísérletek segítségével a hagyományos szilárd, folyadék, gáznemű felosztáson túl elkülönítettük a szemcsehalmoz, valamint a szilárd és a folyékony testeket is további jól elkülöníthető csoportokra osztottuk. Megmutattuk, hogy az egyes eltérő viselkedés mögött az anyagon belüli rend megmaradásának a különböző típusai találhatók. Ezt követően a kinematika szempontjából röviden jellemeztük a klasszikus kontinuumot, a rácskontinuumot és a szemcsehalmoz. Ezen belül megmutattuk, hogy a kollektív viselkedés és a rend megmaradása egyértelműen elkülöníti az egyes viselkedési típusokat. A kollektív viselkedés alapvetően a kontinuumra jellemző, az egyedi viselkedés a rend megtartása mellett a rácskontinuumra, az egyedi viselkedés átrendeződéssel a szemcsehalmozra jellemző.

A jelen vizsgálódásunk során a folytonos és diszkrét modellezés dinamikai kérdéseit vesszük górcső alá. Áttekintjük a belső erők fizikai és matematikai jellemzését, a Newtoni mechanikát az erő és a nyomaték szempontjából, valamint a belső erők értelmezésének lehetőségeit a klasszikus kontinuumban, a rácskontinuumban, valamint a szemcsehalmozban. Különös figyelmet szentelünk az ismeretlenek csoportosításának és a sorfejtésnek a rácskontinuum esetén, amely végül is elvezet az általánosított -, illetve a kvázikontinuum fogalmához.

2 A BELSŐ ERŐK FIZIKAI ÉS MATEMATIKAI JELLEMZÉSE

A testek kinematikai jellemzésénél a szilárd – folyadék – gáznemű felosztás vizsgálatából indulunk ki; ehhez hozzátettük a szemcsés közegeket. A dinamikai vizsgálódást is ezzel a felosztás-

sal kezdjük. Pontosabban megvizsgáljuk a belső erőket – a nyomást – a különböző halmazállapotú testekben.

2.1 Gáz

Először a nyugalomban lévő gáz nyomását vizsgáljuk. A gázban a nyomást a gázt alkotó atomoknak és molekuláknak az egymással való ütközéseivel értelmezzük. Értelmszerűen a gázt magába foglaló tartály oldalfalára ható nyomást az azzal való ütközéssel értelmezzük. A nyomás egy pontban minden irányban azonos. A nyomás a gáz minden pontjában azonos. A gáz nyomása független a gravitációtól, az legfeljebb egyfajta másodlagos jelenséget, a sűrűségnek a gravitáció irányában történő megváltozását (ezenkívül esetleg szedimentációt) eredményez. A gáz nyomása alapvetően az azt alkotó részecskék sebességétől, azaz az adott térfogat nagyságától, a térfogatban lévő részecskék számától, és a hőmérséklettől függ.

Gáz áramlása során a nyomásviszonyok a nyugalmihoz képest megváltoznak. Ezzel együtt a nyomást továbbra is alapvetően a gázt alkotó atomoknak és molekuláknak az egymással való ütközései határozzák meg, a kollektív sebesség – áramlás – legfeljebb módosítja azt. Ami említésre érdemes, az a következő. Az áramlás során az egymás mellett különböző sebességgel áramló „gázsugarak” – a keresztirányú atom- és molekulacsere révén – az áramlás irányába eső sebesség kiegyenlítésére törekszenek. A mechanizmus az az, hogy a gyorsabban haladó sugárból a lassabban haladó sugárba átkerülő részecske néhány ütközés során átadja a lassúbb sugárnak az egyedileg birtokolt, a haladási irányba mutató többlet impulzusát, és hasonló képen a lassabból a gyorsabba jutó részecske „felgyorsul” miközben lassítja a gázsugarat. Ezt a jelenséget nyírófeszültség bevezetésével, annak hatásaként szokás magyarázni. A mechanizmus alapján a feszültség, különösen a nyírófeszültség fogalmának az alkalmazása nem mindenben megalapozott.

2.2 Folyadék

A folyadékban a nyomást a folyadékoszlop súlyával értelmezzük. A folyadék egyes alkotó részeinek, tehát az atomoknak és a molekuláknak a mozgása nem játszik szerepet a nyomás létrehozásában. Fontos hangsúlyozni, hogy a folyadékban van hőmozgás, de nem az határozza meg a folyadékban a nyomásviszonyokat. A folyadékban létrejövő nyomás hasonló a gázban kialakuló nyomáshoz abban, hogy egy pontban minden irányban azonos. A nyomás a vívfelületeken azonos, és a vívfelületeknek a folyadék felszínétől való távolságával arányos. A folyadéknak csak gravitációs térben van nyomása. Ezt igazolja az űrhajósok kísérlete: gravitációmentes térben a folyadékot a felületi feszültség tartotta össze, a folyadék alakját az űrhajósok tetszőlegesen változtathatták, egy-egy apró mozdulattal módosítva a „folyadékcsepp” alakját. Utalunk rá, hogy a gázban a nyomás kialakulásához gravitációra nincs szükség.

Az áramlásban lévő folyadék nyomásviszonyai – hasonlóan az áramló gázéhoz – megváltoznak a nyugalmihoz képest, de az eltérés a folyadékok esetében is csak kis mértékű. Itt is értelmezhető az egymással párhuzamosan áramló sugarak sebességkiegyenlítődése, amelynek a mechanizmusa analóg a gázban lejátszódó folyamattal. Gravitáció hatására elkülönülésről nincs tudomásunk, de különböző fajsúlyú folyadékok rétegezve egymásra önthetők és csak rázás után keverednek össze. (De ez már a felületi feszültséggel van kapcsolatban.)

2.3 Szemcsehalmoz

A szemcsehalmozban a gravitáció hatására oldalnyomás lép fel. Az oldalnyomás nagysága a mélységgel arányos, de a nyomás a halmazokban függ a halmazt alkotó elemek alakjától, és a halmazban való elrendeződésétől. A tapasztalat szerint az oldalnyomás tényezője kisebb, mint egy, de konstruálható olyan halmaz is, amelyben egynél nagyobb. Meg kell jegyezni, hogy az oldalnyomás értéke függ a kohéziótól is, azaz a szemcséknek az egymáshoz való tapadás képességétől. Száraz, „nagy” szemcsék (kavics) esetén a kohézió elhanyagolható, nedves és „kis” szemcsék (homok, még inkább homokliszt) esetén a kohézió jelentős lehet. Az olyan szemcsés közeg, ahol a szemcseméret már az óriásmolekulák nagyságrendjébe esik, inkább folytonos, deformálható szilárd közegként, semmit szemcsehalmozként viselkedik (agyag). A szemcsehalmozokban – az oldalnyomás tényezőjéből következik, hogy – egy pontban a különböző irányokban

más és más a nyomás értéke. A szemcsehalmazban is van hőmozgás, bár ez a szemcsék mechanikai viselkedését nem befolyásolja. A szemcsehalmazban, amennyiben a szemcsék csak érintkeznek, az egyes szemcsére csak erők hathatnak, nyomatékok nem. Ha a kapcsolat nem pontszerű és a kapcsolatban kohézió értelmezhető – valamilyen „ragasztó” van jelen –, akkor a szemcsék egymásra véges nagyságú felületen hatnak, ezt első lépésben megoszló erővel modellezzük, amely esetleg közelíthető, vagy modellezhető az eredő erővel és az eredő nyomatékkal.

2.4 Deformálható szilárd közeg

A deformálható szilárd közegekben nincs nyomás. Gravitáció hatására alatt a függőleges irányban a sűrűségnek megfelelően változik a nyomófeszültség értéke; oldalnyomás nem lép fel. A deformálható szilárd közegben az alakváltozások függvényében megoszló erő, azaz feszültség ébred. A feszültség egy másodrendű szimmetrikus tenzor. Az alakváltozás mechanizmusa többféle is lehet, ennek kapcsán utalunk a tavalyi előadásunkra.

2.5 Mátrixban ülő merev testek

Erre egy igen találó példa a gördülő csapágy. A csapágy két merev pofája között egy rögzített mátrixban golyó, egyenes, vagy kúpos henger alakú elemek ülnek, amelyek a súrlódás hatására forognak. Az elem felületén ható súrlódási erő a forgás középpontjára nézve nyomatékot hoz létre. Tehát modellezhető a mátrixban ülő elem úgy, hogy erők és nyomatékok hatnak rája.

2.6 Dipólfolyadék

Olyan folyadék, amely ellipszoid alakú részecskékből áll, és a részecskék elektromosan polariáltak. Ekkor az elektromágneses tér hatására a részecskék változtatják a térbeli helyzetüket. Az egyes részecskék modellezhetők úgy, hogy erők és nyomatékok hatnak rájuk.

2.7 A halmaz – szilárd test átmenet

A halmazban az egyes szemcsék gyakorlatilag pontonként érintkeznek, és szabadon elmozdulhatnak egymás mellett, sőt elválhatnak egymástól, egy szemcse két másik közé beékelődhet, és/vagy a kettő között átsusszanhat. Amennyiben a szemcsék ezen szabad mozgásának lehetősége megszűnik, akkor a halmaz – viselkedését tekintve – közeledik a deformálható szilárd testhez. Két módon is megvalósulhat ez az átmenet. Az egyik, hogy a szemcséket ragasztó köti össze. Ez a talajnál természetes módon meg végbe. Az igen apró frakciójú szemcsék esetén a vízburok gyakorlatilag összeragasztja a szemcséket. (Az agyag igen apró frakciójú „homokhalmaz”, csak a vízburok szilárd anyaggá kapcsolják össze a homokszemcséket. Természetesen igen leegyszerűsítettük a képet, merthogy a szemcsék közvetlen kapcsolatba is léphetnek, gondoljunk csak az agyag kiégetésére, amikor is nem port, hanem szilárd testet kapunk. Persze, ha folyamatos sodrás közben szárítjuk ki, akkor port is kaphatunk.) A másik, hogy a mechanikai állapot során olyan helyzet alakul ki, hogy a szemcsék már nem mozdulhatnak el egymáson, helycserétől pedig nem lehet szó. Azaz a szemcsék, mint szilárd testek deformálódnak, és ezen deformációk összessége adja a szemcsehalmaz egészének a deformációját.

3 A NEWTONI MECHANIKA

3.1 Pont, pontrendszer, merev test

Az anyagi pont mechanikájának az alapjai a Newton-féle axiómák: a tehetetlenség törvénye, a dinamika alapegyenlete, a kölcsönhatás törvénye és az erőhatások függetlenségének elve. Az egyes axiómák alapján a mechanikai modell egyes elemeit rögzítjük. Így a tehetetlenség törvénye alapján értelmezzük az inerciarendszert. A dinamika alapegyenlete alapján az erőt, a tömeget és az impulzust értelmezzük, maga az egyenlet az erő és az impulzus változása közötti kapcsolatot adja meg. A kölcsönhatás törvénye rögzíti, hogy a hatásokat erőként (ha úgy tetszik,

vektorként) értelmezzük, a hatást két, ellentétes, eredőjüket tekintve nulla értékű erőként modellezzük (foghatjuk fel). Az erőhatások függetlenségének elve azt mondja ki, hogy az egyes erők egymástól függetlenül hatnak, különben az erők fellépésének a sorrendjétől függne a két erő együttes hatása.

Az anyagi pont mozgásegyenletének vizsgálata során értelmezzük a munkát, a kinetikus energiát és az erőteret. Konzervatív (úttól független) erőterben értelmezhető a potenciális energia, és felírható a mechanikai energia megmaradási tétele.

Az anyagi pont centrális erő hatása alatt történő mozgása során értelmezhető a területi sebesség, fennáll a felületi tétel (a centrumból az anyagi ponthoz húzott sugár egyenlő idő alatt egyenlő területet sűrol). Az anyagi pont impulzusának a centrális pontra vonatkozó nyomatékával értelmezzük az anyagi pont impulzusnyomatékát (impulzusmomentumát). Ennek segítségével a felületi tétel a következő alakban fejezhető ki: a centrális mozgást végző anyagi pont impulzusmomentuma állandó. Az impulzushoz hasonlóan bármely erőnek egy pontra vett nyomatékát is értelmezhetjük.

Az anyagi pontok rendszerének vizsgálata során az erőket külső és belső erőkre osztjuk. A belső erők esetén egy újabb axiómát (vagy ha jobban tetszik, akkor egy újabb tapasztalati tény) fogalmazunk meg: a belső erők centrálisak, azaz két anyagi pont között ható erő és ellenerő a két anyagi pontot leíró (modellező) pont által meghatározott egyenes mentén hat.

Ezen feltétel mellett az anyagi pontok mozgása jellemezhető globálisan; ennek során a belső erők nem játszanak szerepet. A globális jellemzés a rendszer tömegközéppontjának a mozgása, a rendszer egészének impulzusa és az energiája segítségével történik. Ehhez a mozgásegyenletek tíz integrálját kell felírni, amelyek megadják a tömegközéppont térbeli helyét (mozgását) (3 egyenlet), a tömegközéppont sebességét (3 egyenlet), a rendszer impulzusmomentuma (3 egyenlet) és a rendszer teljes energiáját (1 egyenlet). Zárt rendszer esetén a rendszer tömegközéppontja tehetetlenségi pályán, állandó sebességgel mozog, az impulzusnyomatéka és az energiája állandó. A rendszer nem feltétlen van nyugalomban, és a rendszert alkotó anyagi pontok a rendszeren belül mozgást végezhetnek (a kezdeti feltételektől és a belső erőktől függően).

Az anyagi pont, illetve pontrendszer mozgásának egyik jellemzője az erőknek és az impulzusoknak egy pontra vett nyomatéka. A nyomaték származtatott mennyiség, első megközelítésben két vektor vektoriális szorzata.

Amíg a kölcsönhatás során az erők „párban” jelentkeznek, addig egy tetszőleges vektor nyomatékának nem kell, hogy feltétlenül legyen „párja”. Ugyanis az impulzus ugyan vektor, de nem két test egymásra hatásaként értelmezzük, hanem egy anyagi pont dinamikai állapotjellemzőjeként.

Az impulzusmomentum az anyagi pont, illetve a pontrendszer mozgásának egyik állapotjellemzője; e nélkül a mozgás egyértelműen nem írható le. A mozgást szokás kinematikai – dinamikai változópár fogalomban jellemezni: az anyagi pontok esetén az elmozduláshoz, pontosabban a sebességváltozáshoz az erőt rendeljük. Az impulzusnyomaték esetén a területi sebességváltozáshoz rendeljük a nyomatékot. Hangsúlyozni kell, hogy nem a szög megváltozásához rendeljük a nyomatékot, hanem a területi sebesség megváltozásához. A területi sebesség megváltozása akkor és csak akkor fejezhető ki szögsebesség változásaként, ha a centrális mozgás pontosan kör mentén történik! (Másképpen megfogalmazva: egy bivektor csak bizonyos megkötés mellett tekinthető szögváltozóznak). Az külön kérdés, hogy egy gömbfelületen való mozgás, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy egy merev testnek egy pont körüli tetszőleges forgása is „centrális” (nem teljesen, mert a centrális mozgás fogalmába az is bele tartozik, hogy síkbeli a mozgás!), és tetszőleges forgás felbontható három forgás „összegére”.

Az anyagi pontok rendszerének egy kitüntetett fajtája a merev test: a rendszert alkotó anyagi pontok egymástól vett távolsága állandó. Megjegyezzük, hogy folytonos anyageloszlásról szó sincs, egyszerűen az anyagi pontokat merev, súlytalan rudak kötik össze. Merev test esetében a belső mozgás nem létezik, ezzel együtt belső erőkről sem lehet beszélni. A merev testet, mint a pontrendszer egészének a mozgását lehet leírni: a tömegközéppont térbeli helyének, a tömegközéppont sebességének, a rendszer impulzusmomentumának, és a rendszer teljes energiájának a változása jellemzi a merev test mozgását.

Egy merev test tehát hat kinematikai szabadságfokkal bír. Ezeket három eltolódás(komponens)ként, és három szögforgás(komponens)ként szokás értelmezni. Ennek megfelelően a merev test dinamikai jellemzéséhez egy erő és egy nyomaték három-három komponensét tekintjük.

Meg kell jegyezni, hogy az eltolódás mellett szereplő három kinematikai szabadságfok alapvetően három területi sebesség, amely a test merev volta, és a kitüntetett, mi több, az egyszer s mindenkorra *rögzített* centrum miatt szögváltozóval egyértelműen megadható.

Végezetül röviden áttekintjük az erőt és a nyomatékot a pontrendszerek mechanikájában.

3.2 Erő

Newton II. axiómájával értelmezzük: az erő nagyságát az általa létrehozott gyorsulás nagyságával arányosnak vesszük, és az erő irányának a gyorsulás irányát tekintjük.

Az erő – vektormennyiség: nagysága és iránya van. Hatása, hogy a test gyorsul, megváltozik a test impulzusa (lendülete).

Az erőt valamely másik test hatásaként értelmezzük. Az erők „párban” lépnek fel, érvényes rájuk a III. axióma: ha egy test egy másik testre valamely erővel hat, úgy az a bizonyos második test az elsőre azonos nagyságú, de ellentétes értelmű erővel hat. Azaz nincs hatás ellenhatás nélkül, és a kettőjük eredője nulla.

A IV., Newton által nem kimondott, de alkalmazott axióma az erőhatások függetlenségének elvét rögzíti. Azaz, ha már hat egy F_1 erő, és ezt követően hat egy F_2 erő, akkor az F_1 erő hatása nem változik meg az F_2 erő fellépésével. Egyúttal F_1 és F_2 erő hatása megegyezik az $F_1 + F_2$ erő hatásával.

Az erő a Newtoni mechanikában elsődleges fogalom, és kiterjedés nélküli, anyagi pontok esetére lett bevezetve (értelmezve).

3.3 Nyomaték

A nyomaték a Newtoni mechanikában másodlagos fogalom, az anyagi pontnak a centrális erő hatása alatti mozgása jellemzésére lett bevezetve. E szerint a centrális mozgásnál a területi sebesség állandó. A terület kifejezhető az impulzusnak a centrumra vett nyomatékával. A felületi tétel azt mondja ki, hogy az anyagi pontra ható erő nyomatéka megegyezik az anyagi pont impulzusnyomatékának idő szerinti változásával. Centrális erő esetén az erő átmegy a centrumon, tehát nyomatékot nem ad, így a területi sebesség állandó.

A nyomaték értelmezéséhez egy vektorra és egy kitüntetett pontra van szükség. A nyomatékot vektoriális szorzatként szokás értelmezni; ebből a szempontból a nyomaték nem vektor, hanem pszeudovektor: a tényezők sorrendjének felcserélésével a nyomaték előjelet vált. A nyomaték tulajdonképpen egy terület meghatározott körüljárási iránnyal. Hiszen a nyomatékot a centrumtól az anyagi ponthoz húzott sugárnak egy egységnyi idő alatt súrolt felület nagyságával azonosítjuk. A vektorok vektoriális szorzatát is területtel értelmezzük, csak éppen pont a kétszeresét annak, mint a sugár által lesöpört terület.

Matematikai értelemben a nyomaték bivektor: egy adott síkban egy mennyiség – terület –, és annak körüljárási iránya. Ez a felbontás nem egyértelmű (egy terület különböző oldalhosszúságú és szögű paralelogrammákkal adható meg). Az, hogy a bivektor a háromdimenziós euklideszi térben (pszeudo)vektorként (is) szemléltethető, a tér dimenziószáma miatt lehetséges: a két-dimenziós altér kodimenziója a háromdimenziós térben éppen egy, azaz a kiegészítő altér egy egyenes, amellyel egybe eshet egy vektor. Az n -dimenziós térben csak az $(n - 1)$ -vektor szemléltethető (pszeudo)vektorként.

A nyomaték tehát egy nagyság és egy körüljárási irány egy kétdimenziós altérben.

Megjegyezzük, hogy a nyomaték nyomatéka, mint vektormennyiség, a 3-dimenziós (Euklideszi) térben nem értelmezhető, mert három vektorból a bivektor mintájára alkotott trivektor egy (alternáló) skalár mennyiség (a három vektor által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata), és nem rendelhető hozzá egy 1-dimenziós altér (és így vektor sem).

4 FOLYTONOS ÁLLAPOTJELLEMZŐK, HATÁRÁTMENET

Határátmeneten azt az eljárást értjük, amellyel valamilyen végtelen sorozat, függvénysorozat, stb. határértékét állapítjuk meg.

A végtelen sorozat: a természetes számokhoz rendelt szám, függvény, stb. értékek halmaza. (Megszámlálhatóan sok elemről beszélünk!)

Határérték: egy sorozat elemei egy előre megadott kicsiny számnál közelebb vannak a „határértékhez” (metrikus térben), illetve, ha a „határérték” bármely környezete véges sok kivételével tartalmazza a sorozat összes tagját (topológikus térben).

Tehát a határérték egy sorozat tagjainak valamely közelségen (távolság, vagy környezet) alapuló vizsgálata. Új halmazt nem értelmez, csak kijelöli azt az elemet, amelyhez a sorozat „tart”. (Ez az elem nem feltétlenül tagja a sorozatnak.)

A határérték az analízis egyik alapfogalma, ezen alapul többek között a differenciálhányados, a folytonos függvény, az integrál, stb. fogalma.

Maga a vizsgálandó függvény, mint ponthalmaz, amelynek pl. a folytonosságát vizsgáljuk, vagy a differenciálhányadosát határozzuk meg, már kontinuum számosságú és mindig csak egy pontban vizsgáljuk egy-egy tulajdonságát: a folytonosságát, a függő és a független változó differenciáljai hányadosának létezését, stb. Nem új, kontinuum számosságú halmazt vezetünk be egy megszámlálhatóan sok elemű halmaz határértékeként.

Tehát, határátmenettel nem értelmezhető

- megszámlálható végtelen sok elemből kontinuum számosságú sok elemű halmaz,
- diszkrét pontok halmazából folytonos közeg,
- anyagi pontok diszkrét tömegeiből folytonos sűrűségeloszlás,
- diszkrét erővektorok sokaságából megoszló erő (feszültségtenzor),
- diszkrét nyomaték „vektorok” sokaságából megoszló nyomaték.

Általában, a kontinuum számosságú tartományon „adott” folytonos függvények, a tenzoriális rendjüktől függetlenül, határátmenettel nem értelmezhetők, hanem azokat posztulálni kell. Hasonlóan ahhoz, ahogy Newton az anyagi pontokra posztulálta az erőt.

Mindezek mellett a megoszló nyomaték azért sem értelmezhető, mert nullméretű távolság esetén a nyomaték fogalma nem értelmezhető: a nyomaték korrekt értelmezéséhez két, nem egybeeső pontra, és azok közötti távolságra van szükség.

Végezetül megvizsgáljuk, hogy határátmenet alapján hogyan lehetne feszültséget értelmezni.

Abból indulunk ki, hogy egyrészt, egy vizsgálat alá vett F felületidomon adott néhány erő (a nyomatéktól nyugodtan eltekinthetünk), másrészt, hogy az erők nem alkotnak egy folytonos tenzormezőt, sőt, diszkrét, megszámlálható sok pontban adottak az erők. Ha ettől a feltevéstől eltekintén, akkor ahhoz jutnánk, hogy posztuláltuk a feszültségtenzort, holott ép azt akarjuk igazolni, hogy határátmenettel értelmezhető. Tehát az erők az F felületidom *véges sok* pontjában adottak. Ezt követően már elegendő arra utalni, hogy az

$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{\sum_F \mathbf{F}}{\int_F df} \quad (1)$$

határátmenettel nem értelmezhető folytonos függvény. Ugyanis, mivel az $\mathbf{F}$ erők véges sok pontban vannak értelmezve, ezért a fenti határértékek azokban a pontokban, ahol az erők adóttak, ott végtelen értéket adnak, ahol pedig nincs erő, ott véges értéket ad. Azon kívül, hogy a határátmenettel nyert értékek nem alkotnak folytonos függvényt, nem tükrözik vissza sem a valóságot, sem pedig mechanikailag egyenértékű rendszert sem értelmeznek.

5 BELSŐ ERŐK A KLASSZIKUS KONTINUUMBAN

A kontinuumban a Newtoni mechanikai erő fogalmával analóg mennyiséget, a megoszló erőt, azaz a feszültséget kell értelmezni.

A feszültség értelmezéséhez ki kell lépni az anyagi pont és a pontrendszerek köréből. Olyan testet kell tekinteni, amely kontinuum számosságú sok pontból áll. Azaz a deformálható szilárd test az euklideszi tér egy (háromdimenziós) tartománya. Ennek bármely pontja kiterjedés nélküli, tömege nincs. Ekkor ahhoz, hogy a Newtoni mechanikát alkalmazni tudjuk, értelmezni kell egy tömeggel bíró „anyagi pontot”. Ez azt jelenti, hogy a kontinuum – kompakt, zárt, korlátos ponthalmaz – egy kicsiny, de véges térfogatú részét kell tekinteni. Ennek – miután van térfogata – már van tömege, és erre a tömegre nézve felírhatók a Newtoni mechanikai egyenletei.

A testen belüli kölcsönhatás megfogalmazásához részben térfogati, részben felületi erőket értelmezünk. A térfogati erők azok, amelyeket „centrálisnak” tekinthetünk, ez az, amellyel a tehetlenség kifejezhető. Az egymás „melletti” kicsiny térfogatú „anyagi pontok” a felületük „mentén” egymásra hatnak, a $\mathbf{P}$ felületi erőkön keresztül:

$$\mathbf{P} = \int_F \sigma dF. \quad (2)$$

Ennek az „egymásra hatásnak” meghatározható az $\mathbf{M}$ nyomatéka is egy pontra véve:

$$\mathbf{M} = \int_F [\sigma, \mathbf{r}] dF. \quad (3)$$

Egy derékszögű tetraéder egyensúlyának a vizsgálata alapján megmutatható, hogy a σ felületi erő valójában nem erő, hanem egy másodrendű tenzor, egy kocka (koordinátafelületek által határolt görbült téglány) egyensúlyának a vizsgálatával, hogy a σ másodrendű tenzor szimmetrikus. Ezen kívül egy elegendően kicsiny, de véges felületen erőt ad, amelyhez másodrendben kicsiny nyomaték társul.

Tehát a kontinuum belső dinamikai állapotát egy pontonként megadott, folytonos, szimmetrikus, másodrendű tenzor értelmezi úgy, hogy egy véges mértékű, de első rendben kicsiny felületen első rendben kicsiny erőt és másodrendben kicsiny nyomatékot ad.

6 BELSŐ ERŐK A RÁCSKONTINUUMBAN, ÉS AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT -, VAGY KVÁZIKONTINUUMBAN

6.1 A megoszló nyomaték formai értelmezése

Az általánosított kontinuumban a klasszikus kontinuum feszültség fogalmával analóg mennyiséget, a megoszló nyomatékot, vagy nyomatéki feszültséget kell értelmezni.

A megoszló nyomatékot a kontinuumban a feszültség analógiájára szokás értelmezni. A σ helyett egy más betűt választva, pl. μ , a feszültséggel analóg matematikai műveleteknek vetik alá. Ennek megfelelően vizsgálják a derékszögű tetraéder egyensúlyát, és megmutatják, hogy a μ mennyiség másodrendű tenzorként transzformálódik. És a kocka egyensúlyát vizsgálva írják fel a rá vonatkozó egyensúlyi (mozgás-) egyenletet. Pontosabban az erő nyomatékára vonatkozó egyenletben veszik figyelembe a μ hatását, és így σ szimmetriája nem feltétlen kell, hogy fennálljon. Ugyanakkor μ szimmetriájára nézve semmiféle megkötés nincs – dinamikai oldalról.

Ami eddig történt, az nem más, mint analógia alapján matematikai összefüggések felírása, amelynek sem a matematikai, sem a fizikai tartalmát nem vizsgáltuk meg.

Tehát a

$$\int_F \sigma dF = \mathbf{P} \quad (4)$$

összefüggés alapján a felületi nyomaték, azaz a megoszló nyomaték egy

$$\int_F \mu dF = \mathbf{M} \quad (5)$$

típusú összefüggéssel lenne értelmezhető. Ehhez az szükséges, hogy megmutassuk, hogy létezik olyan μ folytonos függvény, amely egy pontban *nyomatékként értelmezhető*. Mivel a nyomaték származtatott mennyiség, mint két vektor – erő és az erő karjának – vektoriális szorzata, azaz bivektor, ezért felületen megoszló, *folytonos* nyomaték nem értelmezhető. Ugyanis feszültséggel analóg konstrukció az, hogy minden pontban, a ponthoz kötött megoszló nyomatékot értelmezzük: ekkor a pontnak önmagától vett távolságát kell venni, ami nulla. Amennyiben egy szomszédos ponttól vett távolság szerepel a rendszerben, akkor értelmezhető belső nyomaték, de az nem megoszló, hiszen a pontok magadott, véges nagyságú távolságra helyezkednek el egymástól. (Megjegyezzük, hogy görbe mentén, a görbe érintője körül „forgató” folytonos, megoszló nyomaték értelmezhető.)

Rá kell mutatni arra, hogy a nyomatéki, mikropoláris és direktor elméletekben szereplő nyomatékok mellett mindig szerepel egy kicsiny, hosszúság dimenziójú mennyiség is. Ekkor μ nem folytonos függvény, hanem egy rácsrendszer pontjaiban értelmezett mennyiség, és nem világos, hogy a μ hogyan is változik két rácspont között, és egyáltalában, értelmezett-e két rácspont között.

Másképpen fogalmazva, a kérdés az az, hogy vajon a nyomatéki, mikropoláris és direktor elméletekben szereplő nyomatékok, illetve általánosított feszültségek milyen matematikai objektumok. A kérdésfeltevés jogosságát az indokolja, hogy ezeket a fogalmakat folytonos mennyiségként vezetik be a fenti elméletekben, de „megoszló nyomaték”, és ennek mintájára „megoszló magasabb rendű feszültség” csak „diszkrétén” értelmezhető.

6.2 A mechanikai rendszerek csoportokban rendezése (osztályozása)

A „megoszló nyomaték”, illetve más, „folytonos, magasabb rendű feszültségek” értelmezéséhez más matematikai módszer vezet el. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, először a mechanikai rendszereket kívánjuk csoportokban rendezni (osztályozni). Ezt követően áll módunkban néhány matematikai művelet – az ismeretlenek csoportosítása és a sorfejtés – segítségével a „megoszló nyomatékot”, vagy más, „folytonos, magasabb rendű feszültséget” értelmezni. Először az osztályozást tekintjük át.

A szakirodalomban ismeretes az anyag mechanikai modellezésének az alábbi sora:

anyagi pont – merev test – folytonos közeg – nyomatéki közeg – mikropoláris közeg – direktorok,

A sorba rendezés azon alapul, hogy egyre több szabadságfoka van a modellnek.

A fentiekkel kapcsolatban rá kell mutatni néhány tényre.

Az első, hogy ugyan mind a kinematikai, mind a dinamikai szabadságfokok száma nő, de közben a testre nézve továbbra is csak erőkre és az erők nyomatékára tudunk egyensúlyi (mozgás-) egyenletet felírni. A kinematikai és dinamikai szabadságfokok tenzoriális rendje egyre magasabb, de a leírásra alkalmazott tér ponttér, és a dimenziója továbbra is három. A fentebb megadott *anyagi pont – merev test – folytonos közeg* ... sorban több, a sorral nehezen összeegyeztethető „ugrás” van. Ez egyik, hogy a merev test a folytonos közeg egy speciális esete, amikor is a test nem deformálódik, tehát inkább része, semmint két külön entitás. Ebből a szempontból a pont – közeg felosztás tűnik egyértelműnek, de a közegen belüli, további osztályozás ettől független. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy pontból és kontinuum számosságú sok pontból álló rendszerek.) A sorban a szabadságfokok száma szerint is egy „ugrás” található. Az első elemet eltolódással, a másodikat eltolódással és elfordulással, majd a harmadik elemet ismét csak eltolódással jellemezzük, és csak a negyedik elemtől kezdve lesz ismét eltolódás és elfordulás, mint szabadságfok. Ebből a szempontból az anyagi test és a merev test egyfajta (diszkrét) elemnek, a közegek egy másfajta (folytonos) elemnek tekinthetők. A kétféle szempont szerint a merev test és folytonos közeg két külön csoportba tartozik, és talán nem egy sorról van szó, hanem kettőről. Ugyanakkor ki kell térni arra, hogy a merev test igazából nem kontinuum: anyagi pontok mereven kapcsolva már merev testet alkotnak, a merev test tehát nem feltétlen kontinuum. A számosság kapcsán kell megemlíteni azt is, hogy a mechanikai rendszerekhez tartoznak az anyagi pontok rendszere, a merev testek rendszere, mint például a szemcsék halmaza, vagy a kristályrácsok. Ezek a mechanikai rendszerek, mint az anyagnak közegeként való modelljei, nehezen illeszthetők be a fenti lineáris sorba.

A továbbiakban a dinamikai mennyiségek vizsgálatán keresztül teszünk javaslatot a klasszikus kontinuum általánosításának új (?) értelmezésére, illetve a hagyományos *anyagi pont – merev test – folytonos közeg* ... sor helyett a mechanikai modelleknek egy táblázatos elrendezésbe való összefoglalására.

A mechanikai rendszereket az alábbi „sor”-ba rendezzük. (Az osztályozáshoz néhány állítást igazolni kell; ettől most eltekintünk.) Fontos kihangsúlyozni, hogy kontinuumról még nem beszélünk.

	<i>merev test</i>	
<i>anyagi pont</i>	– <i>anyagi pontok rendszere</i> –	<i>deformálható szilárd test</i>
		<i>érintkező szemcsék halmaza</i>

Ezt követően kellene értelmezni egy olyan „anyagi pontot”, amely nem csak az eltolódásával, hanem az elfordulásával is jellemezhető, valamint nem csak erők, hanem nyomatékok is hathatnak rája. Ennek a fogalomnak a fizika más területein már vannak előzményei, ezt spinornak ne-

vezzük. Tulajdonképpen a merev test egy ilyen spinor, csak a merev testnek véges kiterjedése van, a spinort úgy kívánjuk értelmezni, mint az anyagi pontot: kiterjedés nélküli.

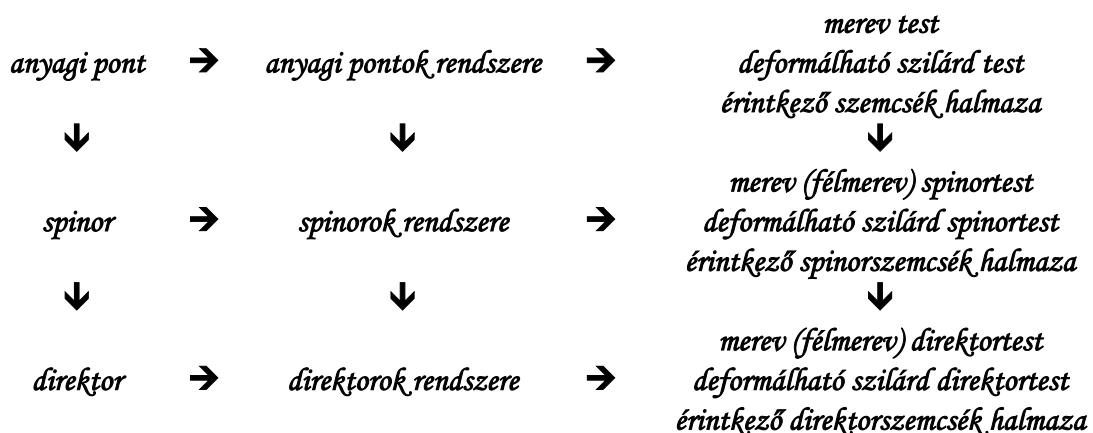
$$\text{spinor} \quad - \quad \text{spinorok rendszere} \quad - \quad \begin{array}{l} \text{merev (félmerev) spinortest} \\ \text{deformálható szilárd spinortest} \\ \text{érintkező spinorszemcsék halmaza} \end{array}$$

Ezt követően kellene értelmezni egy olyan „anyagi pontot”, amely nem csak az eltolódásával és az elfordulásával, hanem belső alakváltozásával is jellemezhető, valamint nem csak erők és nyomatékok, hanem belső feszültségek is hathatnak rája. Ennek a fogalomnak a már korábban a fizikában bevezetett direktor feleltethető meg. Tulajdonképpen a deformálható szilárd test egy ilyen direktor, csak a szilárd testnek véges kiterjedése van, a direktort úgy kívánjuk értelmezni, mint az anyagi pontot: kiterjedés nélküli.

$$\text{direktor} \quad - \quad \text{direktorok rendszere} \quad - \quad \begin{array}{l} \text{merev (félmerev) direktortest} \\ \text{deformálható szilárd direktortest} \\ \text{érintkező direktorszemcsék halmaza} \end{array}$$

Most összerakható a rendszer (lásd a következő táblázatot); a rendszer teljes. A direktor belső tulajdonsága alapján (a tenzor rendje szerint) akár folytatható is. De csak lefelé.

Megjegyzés: a rendszerben a kontinuum nem szerepel. Azaz ezek a – fentebb megnevezett – rendszerek megszámlálható sok elemből állnak, legfeljebb az egyes elemek kinematikai és dinamikai szabadságfokai eltérőek (jellegükben és számukban). A kontinuum a fentiektől eltérő fogalom.



6.3 Csoportosítás

A csoportosítás elvét két dimenzióban, egy kétszer két elemű rendszeren mutatjuk meg a következő oldal ábráján.

Minden egyes elem független szabadságfokokkal rendelkezik				
Vízszintes erők				
Függőleges erők				

A rendszer tehát négy elemből áll, amelyet egy négyzet négy csúcsában állónak képzelünk el. Minden elemnek két szabadságfoka van, tehát a rendszer összesen 4×2 , azaz 8 szabadságfokkal bír. Ezt az alábbi táblázatban tüntettük fel. Egy-egy szabadságfokot egy-egy nyíl ábrázol a táblázatban.

A csoportosítás során olyan ismeretleneket „képezzünk”, hogy egy-egy „általánosított”, „csoportosított” ismeretlenben minden egyes elem rendelkezzen erőkomponenssel, az erőkomponensek nagyságra egyezzenek meg, legfeljebb értelmük (irányításuk a hatásvonal mentén), illetve irányuk (melyik tengellyel esik egybe a hatásvonala) nem kell, hogy azonos legyen. A csoportosítás ezután a szimmetria elvei szerint végezhető el. Az első (két) ismeretlen az, ha minden csomópontban azonos irányban, azonos értelemben hat az erő; ekkor kapjuk a két tengely irányába ható erőt (első oszlop a következő táblázatban). Ha két-két elemre az erők értelmét (irányítását) megváltoztatjuk, akkor különböző feszültségállapotok diszkrét modelljeihez jutunk. Ha egy sorban változtatjuk meg az erők irányítását, akkor az egyszerű nyíráshoz (harmadik oszlop), ha egy oszlopban, akkor a nyomáshoz (negyedik oszlop), végül, ha átlósan, akkor a (tiszt) hajlításhoz (ötödik oszlop) jutunk. Végezetül, ha a két egyszerű nyírás összegét és különbségét képezzük (pontosabban azok felét), akkor jutunk a forgató (csavaró) nyomatékhoz és a tiszta nyíráshoz (második oszlop).

Erők	Nyomaték nyírófeszültség		Feszültség	Megoszló nyomaték
	Forgató nyomaték	Egyszerű nyírás		
Erő			Nyomás	Hajlítás
Erő	Tiszta nyírás	Egyszerű nyírás	Nyomás	Hajlítás

A csoportosított ismeretleneket a fenti táblázatban ábráztuk. Ebben a táblázatban egy-egy négyzetben szereplő négy nyíl egyszerre alkotja a csoportosított, vagy általánosított ismeretlent. Rá kell mutatni arra, hogy ez az eljárás semmiben sem különbözik a Lagrange által az analitikus

mechanikában alkalmazott csoportosítás módszerétől (legfeljebb ö analitikusan végzete el a csoportosítást, mi, a szemléletesség kedvéért, geometriai úton).

Az látható, hogy a nyomatéki elmélet alapvető elemei megjelennek, ha úgy tetszik reprezentálhatók: az erő, a nyomaték, a normál- és nyírófeszültségek (maga a feszültségtenzor szimmetrikus), és a „megoszló” nyomatékok.

A következő lépés a térbeli, $2 \times 2 \times 2$ elemű egységre vonatkozó csoportosított ismeretlenek előállítása, illetve a síkban 3×3 elemű egységek vizsgálata. Ez utóbbi elvezet a térbeli $3 \times 3 \times 3$ rendszerhez. A további vizsgálathoz két lehetőség áll fenn. Az egyik az, hogy az elemek számát növeljük, és az $n \times n \times n$ ($n = 4, 5, \dots$) eseteket vizsgáljuk. Vagy eltekintünk attól, hogy a tér három irányában azonos a figyelembe vett elemek száma, és a $k \times l \times m$ ($k \neq l \neq m$, $k \neq m$) általános eseteket vizsgáljuk. Sőt, a koordináta-rendszer ortogonalitásától eltekintve modellezhető tetszőleges koordináta-rendszerű, „görbült” rácshálózat is. Ezek további, részletes, vizsgálatától eltekintünk.

Érdekes rámutatni a fenti táblázat egy sajátosságára: a nyomatékkal kapcsolatos mennyiségek megjelentek úgy, hogy az alaprendszerben csak erőket tekintettünk ismeretleneknek, és nyomatékokat nem. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy ha a nyilak alatt forgatónyomatékot értünk, akkor a csoportosítás során olyan „általánosított” nyomatékokat értelmeznénk, amelyek mind a négy elemet külön-külön forgatnák.

A csoportosítással ugyan szemléletesen értelmezhető mind a feszültség, mind a „nyomatéki feszültség”, de az így bevezetett „általánosított”, vagy „csoportosított” ismeretlenek diszkrét mennyiségek. Ezek nem tekinthetők folytonos mennyiségeknek.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a diszkrét mennyiségeket hogyan lehet folytonos mennyiségekkel „közelíteni”, azaz valamilyen értelemben folytonos elméletet létrehozni.

6.4 Sorfejtés, módszer a folytonos mennyiségek értelmezéséhez

A fenti csoportosítás után előáll egy olyan helyzet, hogy rácspontokból alkotott cellákon, azaz diszkrét értelmezési tartományon adottak az ismeretlen mennyiségek.

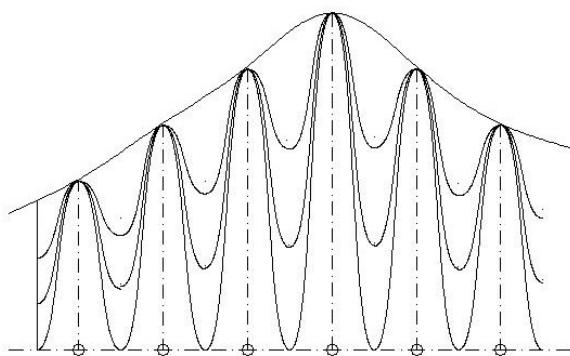
Rácspontokon adott ismeretleneket közelítjük folytonos függvényekkel. A folytonos függvények értelmezési tartománya a folytonos beágyazó tér (kontinuum!). Ezt az elvet két ábrával illusztráljuk.

Az első két ábrán azt mutatjuk meg, hogy diszkrét pontokban értelmezett függvényt különböző jellegű folytonos függvényekkel közelíthetjük. A diszkrétséget legjobban megközelítő függvények Dirac-delta jellegűek, de a folytonosság elvárásának a diszkrét pontokat a legsimábban összekötő görbék felelnek meg. Ezek a következő két ábrán a „csúcsokat” „legrövidebben” összekötő görbék.

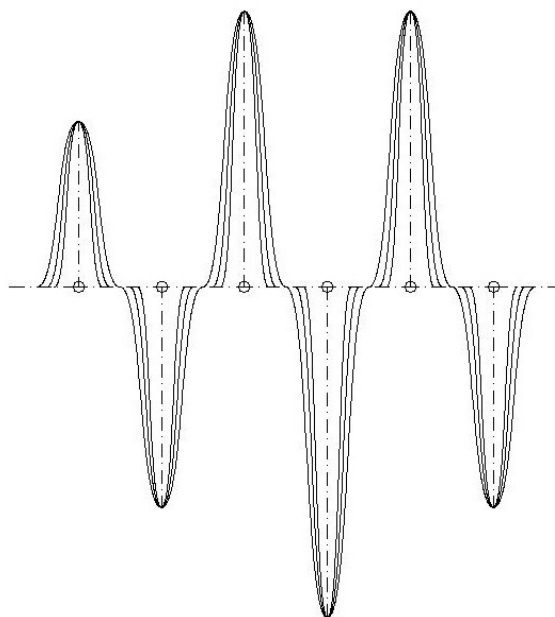
A második két ábrán kiemeltük a folytonos modellezés görbéit, illetve az attól való eltérés egy-két változatát is feltüntettük. Ez utóbbiak a két pont között található „hullámszámban”, illetve az egyes hullámok alakjában különböznek egymástól.

Megjegyezzük, hogy a sorfejtésben megtartott tagok számával különböző elméleteket lehet „generálni”.

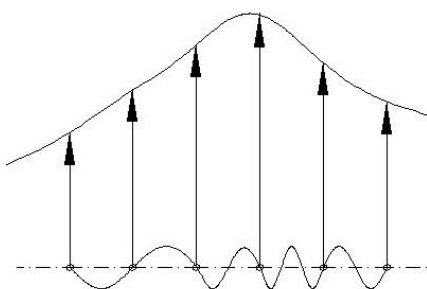
A diszkrét rendszert alapvetően két viselkedési forma különbözteti meg a folytonos viselkedéstől. Az egyik, hogy a kollektív mozgás mellett fellép az egyedi, tehát a szomszédos elemek egymásra történő mozgása, valamint az egyes elemeknek a kollektív mozgásából adódó, az eltolódással egyértelműen meghatározott elforduláson kívüli, az egyes elemek egyedi elfordulása is. Az ábrák a kollektív és a nem kollektív mozgásra egyaránt vonatkozó sorfejtést tartalmazzák; fizikailag az elfordulást interpretálják.



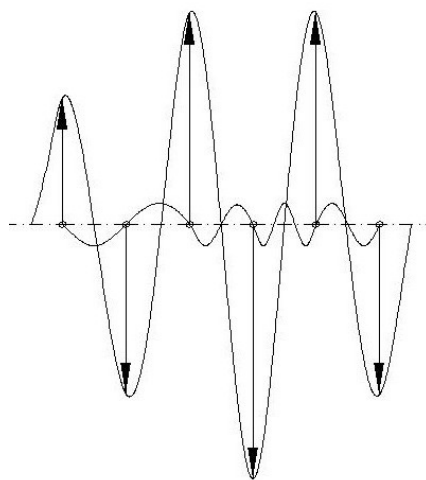
kollektív viselkedés



nem kollektív viselkedés



kollektív viselkedés



nem kollektív viselkedés

Végzetül rá kell mutatni arra, hogy a folytonos modell, azaz a klasszikus kontinuum, a kollektív viselkedést írja le. A diszkrét modell folytonos közelítését szokás kvázikontinuumnak, vagy rácskontinuumnak nevezni. Ezek alapvetően a nem kollektív mozgások jellemzésére alkalmasak. Ilyen például az optikai rezgés rácsokban, vagy zavaró hatások fellépése az egyes rácscok kapcsolódási felületein, vagy nemlokális hatás fellépése a rács peremén. A vizsgálat többnyire a rezgésekre, illetve a rácson belüli kötésekből a folytonos modell anyagi állandóinak meghatározására vonatkozik.

7 BELSŐ ERŐK A SZEMCSEHALMAZBAN

A szemcsehalmozban ébredő erők alapvető tulajdonságait egyrészt a tavalyi előadáson ismertettük, másrészt röviden összefoglaltuk a jelen előadás 2. pontjában. Ezért itt csak néhány fontosabb jellemzőjét érintjük.

A szemcsehalmoz a szilárd közegetől alapvetően az különbözteti meg, hogy az egyes szemcsék képesek a többi szemcsétől függetlenül mozogni, pontosabban, lokálisan egy szemcse elmozdulhat egy másik szemcsén, akár csúszva, akár gördülve, sőt, két szemcse közé beékelődhet egy harmadik, vagy fordítva, két szemcse úgy záródik össze, hogy közben kiszorítja maguk közül a harmadikat.

A szemcsehalmozban fellépő erők függenek a szemcsék közötti kapcsolattól. A kapcsolatok az alábbi csoportokba oszthatók: száraz, vagy súrlódás nélküli, súrlódó szemcsék halmaza, és nyúlós ragasztóval (viszkóz folyadékkal) körülvett szemcsék halmaza. Amennyiben a viszkozitás „végtelenné” válik, a szemcsehalmoz cementálódik, és szilárd testté alakul át.

Az első két esetben a szemcsehalmoz tekinthető szilárd, oválisnak gondolt merev testek halmozának. A szemcsék pontokban érintkeznek, a szemcsék között az érintkezési pontban az érintkező felületek közös normális irányába esik a kapcsolati erő. Feltesszük, hogy súrlódás nem lép fel, valamint, hogy csak nyomóerő ébred a szemcsék között. Feltesszük továbbá, hogy a szemcsehalmoz közel izometrikus és közel azonos nagyságú szemcsék alkotják. Ezen feltevések mellett megmutatható, hogy egy oválisra ható három erő három erővel egyensúlyozható. Ugyanakkor megmutatható az is, hogy ez esetben a három erőhöz tetszőleges pontban nem lehet felvenni a három „támaszpontot”; magyarul a támaszpontok helye, iránya és a támaszerők nagysága egyaránt ismeretlen az egyensúlyi állapot meghatározása során. Ez azt jelenti, hogy az egyensúly beállításához egy-egy szemcsének addig kell forognia a többi szemcse között, hogy elérje azt a helyzetet, amelyben a rá ható erők egyensúlyba nem kerülnek. Másképpen megfogalmazva: a szemcsék addig forognak, amíg a szemcsékre ható erők eredő ereje és eredő nyomtéka zérussá nem válik.

Megmutatható, hogy a súrlódás a képet kvalitatíve nem változtatja meg, csak a feladatot statikailag határozatlanná teszi. De a lényegen nem változtat: amennyiben a kezdeti állapotban a három feltámaszkodási ponton ébredő erők – a súrlódást is figyelembe véve – nem képesek egyensúlyozni a három terhelő erőt, úgy a szemcse addig forog a három „támaszpontja” (pontosabban a három támaszfelülete) fölött, amíg az egyensúly be nem áll.

Amennyiben viszkóz folyadék „ragasztja össze” a szemcséket, akkor a kép jelentősen változik. Először is az érintkezési pontok helyett érintkezési felületekről kell beszélni, ha elegendően kicsiny az érintkezés felülete, azaz, ha a ragasztó éppen csak az érintkezési pont környezetében található. Ekkor még ugyan érvelhetünk úgy, hogy az érintkezési pontokban erők és nyomatékok ébrednek, de ekkor már egy érintkezési pont (felület) hat dinamikai szabadságfoka elegendő a szemcse egyensúlyának biztosításához. Tehát ettől a pillanattól kezdve a szemcsék halmaza ritka is lehet (egy szemcse feltámaszkodhat csak egyre, és nem kell feltétlen háromra), de alapvetően statikailag határozatlanná válik a rendszer. Ha a kapcsolati erők nagysága korlátlan lehet, akkor a rendszer cementálódott, ha korlátok vannak, akkor a korlátok elérését követően a szemcsék merevtestszerűen mozoghatnak. A szemcsehalmozra jellemző viselkedés feltétele tehát a kapcsolati erők nagyságának a korlátozása.

Ha a viszkózus folyadék már körbeveszi a szemcsét, és a szemcsék már nem is közvetlenül érintkeznek, hanem a folyadékon keresztül, akkor a szemcsék úsznak a viszkózus folyadékban. Ekkor még nem zárható ki a szemcsék egymáshoz viszonyított elmozdulása, és elfordulása, de mozgásukat már egy folyadékban kell leírni. Végezetül, mint azt már említettük, ha a viszkózus folyadék viszkozitása igen nagy, úgy egy deformálható, szilárd mátrixban ülő deformálható, szilárd szemcsék halmazát nyerjük. Ez deformálható szilárd testként viselkedik. (Viselkedése a mikroegyenetlen rugalmasságtannal jól leírható.)

Végül meg kell említeni, hogy a nem izometrikus szemcsehalmoz esetén a rendszer már bizonyíthatóan nem tekinthető statikailag határozottnak, bár egyes esetekben (kis szemcsék a nagyok között, vagy egy nagy szemcse a kicsik között) ezzel az elvvel kezelhető.

8 ÖSSZEFOGLALÁS

Az előadásban áttekintettük a gázban, a folyadékban, a szemcsehalmazban, a szilárd testben, a mátrixban ülő merev testekben, és a dipólfolyadékban ébredő belső erőket.

Ezt követően áttekintettük a Newtoni mechanikát. Rámutatnunk arra, hogy az erő elsődleges fogalom, a nyomaték másodlagos, származtatott. Rámutattunk arra is, hogy a nyomaték, mint származtatott mennyiség, egy kétdimenziós altérben egy mennyiség irányítással (bivektor – alternáló forma), továbbá értelmezéséhez egy erőn kívül egy távolságra is szükség van.

Megmutattuk, hogy a megoszló nyomaték határártmenettel nem értelmezhető csak úgy, mint más megoszló mennyiség – értsd: magasabb rendű feszültség – sem.

Az *anyagi pont – merev test – folytonos közeg – nyomatéki közeg – mikropoláris közeg – direktorok* sor helyett az *anyagi pont – anyagi pontok rendszere – érintkező anyagi pontok rendszere* sort javasoljuk. Ekkor az anyagi pont helyett tekinthető más, „gazdagabb” mechanikai rendszer is „alapelemnek”, amelyekből hasonló sor(ok) képezhetők. Az érintkező anyagi pontok rendszerén belül lehet értelmezni a szemcsék halmazát, a merev testet, a deformálható testet.

Mindezek mellett az érintkező szemcsék halmaza automatikusan még nem válik kontinuummá. A kontinuum önálló entitás.

A szabályos rácspontokban ülő mechanikai rendszer esetén az ismeretlenek csoportosíthatók, így más tartalommal is megtölthető a „gazdagabb” mechanikai rendszer fogalma.

A szabályos rácspontokban megadott mechanikai rendszer esetén az ismeretleneket csoportosítva bevezethetők a „nyomatéki” feszültségek, valamint a „magasabbrendű feszültségi állapotok”. Ezen csoportosított ismeretlenekre nézve sorfejtést alkalmazva értelmezhető egyfajta folytonos megoszló erő, illetve folytonos közeg, az úgynevezett *általánosított*, vagy, Kunyin után, *kvázi*-, vagy *rácskontinuum*. A rendszer leírása ugyan folytonos függvényekkel történik, de maga a rendszer diszkrét.

IRODALOM

- Budó Á. 1972. *Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest. (Ötödik kiadás)
- Császár Á. 1970. *Bevezetés a topológiába*. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Császár Á. 1983.: *Valós analízis*. I.-II. Tankönyvkiadó, Budapest
- Eringen, A.C. 1970. *Foundations of Micropolar Thermoelasticity*. Springer, Wien–New York
- Eringen, A.C. 1998. *Microcontinuum Field Theories*. I. *Foundations and Solids*. Springer, New York – Berlin – Heidelberg
- Komornik V. 2003. *Valós analízis előadások*. I.-II. Typotex, Budapest
- Кунин, И. А. 1975. *Теория упругих сред с микроструктурой*. Наука, Москва
- Lámer G. 1984a. Contradictions in the Theory of Micropolar Elasticity and Their Causes = *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, II (1), pp. 12-16
- Lámer G. 1984b. Differential Geometry, as Mathematical Background of Continuum Physics = *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, II (3), pp. 17-21
- Lámer G. 1985. On Continuous and Discrete Mechanical Systems = *Newsletter*, Techn. Univ. of Budapest, III (3), pp. 12-15
- Lámer G. 1994. Folytonos és diszkrét modellek a kontinuummechanikában és a termodinamikában. In: *Termodinamikai előadások*. Szerk.: Lámer G., Eötvös L. Fiz. Társ. Bp., pp. 76-81
- Lámer G. 2000. Kinematikai szabadságfokok a klasszikus és az általánosított kontinuumokban; BME Háló: <http://www.me.bme.hu/esemenyek/szilszem/lamer.html>, 2001.; Abstract: Mechanics of Solids BME.
- Lámer G. 2006. „Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései” In: *Mérnökgeológia-Közetmechanika 2006*. Szerk.: Török Á. – Vásárhelyi B., Műegyetemi Kiadó, Budapest [A Mérnökgeológia-Közetmechanika Kiskönyvtára 2. kötet.] pp. 145-156.
- Love, A.E.H. 1927. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Fourth ed. Cambridge, At the University Press,
- Лурье, А.И. 1970. *Теория упругости*. Наука, Москва.
- Nowackij, W. 1970. *Theory of micropolar elasticity*. Springer, Wien – New York-
- Постников, М.М. 1989., 1988. Лекции по геометрии. Т. III. Гладкие многообразия. Т. IV. Дифференциальная геометрия. Наука, Москва.