AZ ANYAG FOLYTONOS ÉS DISZKRÉT MODELLEZÉSÉNEK KINEMATIKAI KÉRDÉSEI

Lámer Géza
Lámer és Lámer Kft., Budapest, lamer@emma.hu

1. Bevezetés

Az atomi-molekuláris felépítésű deformálható szilárd testet mechanikai állapotváltozás során folytonos eloszlásúnak tekintjük. A folytonos anyageloszlású testeket kontinuumnak szokás nevezni. A kontinuumot, annak alakváltozása során, kinematikai szempontból elsődlegesen az eltolódásmezővel jellemezzük. A folytonos anyageloszlásúnak tekinthető testek mellett az elmúlt néhány évtizedben a vizsgálódások középpontjába kerültek az olyan anyageloszlású testek, amelyekben valamiféle szemcsézettség, periodikusan ismétlődő struktúra van jelen. Ennek egyik tipikus példája a kristályrács, a másik pedig egy lágyabb mátrixban ülő keményebb szemcsék kompozíciója. Ennek a strukturált „kontinuumnak" a kinematikai jellemzéséhez szükséges a rácspontokban, vagy a mátrixban ülő szemcsék eltolódásain kívül azok elfordulásait is, esetleg bonyolultabb belső struktúra értelmezése esetén a struktúra változását visszatükröző (többnyire egy szimmetrikus, másodrendű tenzorral jellemezhető) kinematikai szabadságfokokat is figyelembe venni. A rendszer kinematikai jellemzésére nyert összefüggések egyrészt magukba foglalják a strukturálatlan kontinuum eltolódására, alakváltozására, továbbá egy pontja környezetének az elfordulására vonatkozó, már ismert összefüggéseket, másrészt a „strukturált kontinuum" egyes elemeinek az elfordulására, és a belső struktúra megváltozására vonatkozó újabb összefüggéseket is. Látszólag az eredeti, azaz a strukturálatlan kontinuum fogalmának az általánosítása áll előttünk. Ennek következtében az eredeti kontinuumot a klasszikus jelzővel, az új változatokat az általánosított jelzővel illetjük.

A vizsgálódásunk többrétű: egyrészt szeretnők matematikailag és fizikailag elkülöníteni a klasszikus és az általánosított kontinuumot, másrészt megkeresni az általánosítás matematikai hátterét. Jelen előadásban a kinematikai kérdéseket tekintjük át. Ezen belül áttekintjük a különböző alakváltozási mechanizmusok fizikai és matematikai leírásait, jellemezzük a klasszikus kontinuumot, megadjuk a forgás és a belső strukturáltság változását jellemezni hivatott kinematikai szabadságfokok folytonos leírásának matematikai hátterét, és végül megvizsgáljuk a szemcsehalmazok viselkedését is. Ez egyúttal az előadás felépítését is visszatükrözi.

2. Az alakváltozások fizikai és matematikai jellemzése

A szilárd – folyadék – gáznemű felosztást több értelemben is használjuk. Az egyik a halmazállapothoz, annak változásához kötődik. A másik a mechanikai viselkedés, a külső hatással szemben való ellenállás mértéke/mikéntje. A harmadik a belső struktúra szerinti. Habár három különböző dologról beszélünk, a felosztás három szempontja *általában* fedi egymást. A továbbiakban használni fogjuk a szilárd, folyékony és légnemű test fogalmakat, és a mechanikai viselkedés szerint igyekszünk a testeket osztályozni. Az osztályozáshoz néhány – remélhetőleg nem csak a személyes érdeklődésből fakadóan – kiválasztott egyedi kísérleteket vesszük alapul.

Mielőtt áttekintenénk a kísérleteket, két testet előzetesen megvizsgálunk. Az egyik a merev test. Ezzel semmi sem történik, legfeljebb eltolódik és forog, de alakját nem változtatja, és benne belső erő nem ébred. Ezért a vizsgálatokból kizárjuk. A másik a gáznemű test. Igaz, igen érdekes jelenségeket mutat a p–V–T összefüggéstől kezdve az áramláson át a rétegződésig és a szedimentációig, de igazából inkább kitér a mechanikai behatás elől – próbálja meg valaki a markában összeszorítani – semmint bevárja azt. Ezért nem vizsgáljuk, bár a táblázatokban szerepeltetjük.

Ezen „szűkítés" után nézzük a kísérleteket. Ezek a következők. Gravitációban letesszük a testet egy sík lapra, lyukat fúrunk be, edénybe helyezzük és kis felületen erőhatásnak teszünk ki, edényben rázzuk, hajtogatjuk.

Elöljáróban jelezzük, hogy a hármas felosztást – szilárd–folyadék–gáz – tovább bontjuk. Egyrészt a szilárd testet az alakváltozás mechanizmusa szerint; másrészt a szilárd és a folyadék közé beillesztjük a szemcsehalmazokat, végül a folyadékokat a súrlódás szerint csoportokra osztjuk. A táblázatokban a ∞ a végtelen nagy viszkozitást (befagyott folyadék, mint például az üveg), az n a nagy viszkozitást (mint például a sűrű méz, aszfalt), az 1 súrlódásmentes (mint például a „száraz" víz) folyadékot jelöli.

A továbbiakban, táblázatos formában, röviden ismertetjük a kísérletek „eredményeit". Az 1. táblázatból jól látható, hogy a nagy csoportok jók elkülönülnek, hogy a további felosztásuk indokolt, de az is látszik, a végtelen nagy viszkozitással rendelkező anyagok, mint pl. az üveg, szilárd testként viselkednek, vagy az igen nagy viszkozitással rendelkező anyagok, mint pl. a kátrány, sok hasonlóságot mutatnak a képlékeny folyással, vagy a tésztadagasztással.

Arra rá kell mutatni, hogy az anyag mechanikailag jellemezhető viselkedéseinek csak egy „szeletét" mutattuk be. Nem érintettünk, többek között, olyan jelenségeket, mint a jég folyása, vagy a rugalmas folyadék sugara rugalmas visszahúzódása az edénybe. Ezek, de már a képlékeny folyás jelensége is, arra utalnak, hogy az anyag viselkedés szerinti szilárd–folyadék–gáz felosztása nem csak a földi fizikai körülmények – 15,5 ºC, 1 atmoszféra nyomás és 1 g gravitáció – függvénye, hanem a belső mechanikai állapot (elsősorban a feszültségállapot) függvénye is. Ennek taglalása meghaladja az előadás kereteit.

Az 1. táblázat alapján világos, hogy a különböző viselkedés mögött más és más belső szerkezet, illetve a szerkezet más és más átalakulása áll. És a hangsúly ez utóbbin van: mi módon alakul át a belső szerkezet, netán, nem változik, vagy ugyan változik a lokális rend, de mégsem változik globálisan. A következő táblázatban a belső szerkezet változását próbáljuk meg néhány szóban jellemezni.

<table>
<tr><th colspan="2">Test</th><th>gravitáció</th><th>lyukfúrás</th><th>helyi nyomás</th><th>rázás</th><th>hajtogatás</th></tr>
<tr><td rowspan="4">szilárd test</td><td>a struktúrát megtartja</td><td rowspan="4">alakját megtartja</td><td>az anyagot ki kell venni</td><td>ellenáll</td><td rowspan="4">nem történik semmi</td><td>nem lehet</td></tr>
<tr><td>képlékeny folyás</td><td>az anyagot ki kell venni, széttolható</td><td>ellenáll, vagy belenyomódik</td><td>meg lehet tenni</td></tr>
<tr><td>tészta (dagasztás)</td><td>széttolható</td><td>keresztül-megy</td><td>összeáll és nem különböz-tethető meg</td></tr>
<tr><td>gumi típusú alakváltozás</td><td>az anyagot ki kell venni</td><td>ellenáll</td><td>nem lehet</td></tr>
<tr><td colspan="2">szemcsés anyag</td><td>kúp</td><td>átboltozódás, de az anyagot ki kell venni</td><td>„talajtörés”</td><td>összeáll, befeszül</td><td>nem lehet</td></tr>
<tr><td rowspan="3">viszkózus folyadék</td><td>∞</td><td>alakját megtartja</td><td>az anyagot ki kell venni</td><td>ellenáll</td><td>semmi</td><td>nem lehet</td></tr>
<tr><td>n</td><td>lassan szétterül</td><td>széttolható</td><td>lassan belemerül</td><td>semmi, kis remegés</td><td>mint a tésztánál</td></tr>
<tr><td>1</td><td>elfolyik és cseppekre bomlik</td><td>nem lehet</td><td>azonnal belemerül</td><td>remeg</td><td>értelmetlen</td></tr>
<tr><td colspan="2">gáz</td><td>elszáll</td><td>értelmetlen</td><td>értelmetlen</td><td>értelmetlen</td><td>értelmetlen</td></tr>
</table>

1. táblázat

A táblázat szinte sugallja, hogy az alakváltozásnak két fő típusa lehet: az anyagot alkotó elemek sorrendje, egymásutánisága kötött, vagy megváltozik.

<table>
<tr><th colspan="2">test</th><th>struktúra</th><th>a struktúra változása</th></tr>
<tr><td rowspan="4">szilárd test</td><td>a struktúrát megtartja</td><td rowspan="4">rögzített</td><td>rögzített a szerkezet</td></tr>
<tr><td>képlékeny folyás</td><td>a doméneken belül van, azok egymáshoz képest rögzítettek</td></tr>
<tr><td>tészta (dagasztás)</td><td>a folytonosság megmarad, a kapcsolatok újjáalakulnak</td></tr>
<tr><td>gumi típusú alakváltozás</td><td>fel-le tekeredik, kémia kötések újjáalakulnak</td></tr>
<tr><td colspan="2">szemcsehalmaz</td><td>van, de nem rögzített</td><td>tömörülés, lazulás, áthalmozódás</td></tr>
<tr><td rowspan="3">viszkózus folyadék</td><td>∞</td><td>van</td><td>nincs változás</td></tr>
<tr><td>n</td><td>lassú változás</td><td>lassan változik</td></tr>
<tr><td>1</td><td>nincs</td><td>minden pillanatban újjáalakul</td></tr>
<tr><td colspan="2">gáz</td><td>nincs</td><td>nincs értelmezve</td></tr>
</table>

2. táblázat

Szilárd, pontosabban *abszolút* szilárd az a test, amely a mechanikai alakváltozás során megtartja az eredeti – topológiai – rendet, azaz a szomszédossági viszonyokat. Azok, amelyek nem tartják meg, azok a meg nem tartás mikéntje szerint különülnek el. Érdekes tény, hogy a folyadéknak „nincs” szerkezete (az egyik újabb felfogás szerint a folyadékban rövidtávú rend van, és hosszútávon nincs rend), éppen ezért, ha el is mozdulnak egymáshoz képest az azt alkotó atomok/molekulák a „nincs-szerkezet” azonos marad. Ebből a szempontból a tészta, és a szemcsehalmaz is azonos. Álláspontunk szerint ugyan a folyadék is szemcsehalmaz, de mint a gravitációs és a lyukfúrási kísérlet jelzi, a szemcsék mérete és szemcsék közötti kapcsolati erő, valamint a felületi feszültség elkülönít két önálló csoportot.

A fizikai leírás után sok dolgunk nincs. Egyszerűen a fizikai jelenség – szomszédosság megmaradása, megváltozása – matematikai leírását kell néven nevezni: ez a topológia. És a további feladat a topológiai nyelvére lefordítani a fizikai viselkedést. De tovább is kell menni. Rá kell mutatni arra, hogy a topológiai rend megléte teszi lehetővé a differenciál- és integrálszámítás alkalmazást, valamint a differenciálgeometriai struktúrák, többek között a mérés alkalmazását. És fordítva, a topológiai rend sérülése folytán ezek nem alkalmazhatók. Azaz más matematikai apparátus után kell nézni. A második táblázathoz hozzárendeljük a topológia rend megléte/nem megléte fogalmakat, valamint a topológia rend lokális, globális sérülését, vagy egy nagy léptékű megmaradás és kis léptékű sérülés eseteit. Ezt a harmadik táblázatban foglaltuk össze.

<table>
<tr><th colspan="2">test</th><th>topológia rend</th><th>a rend</th></tr>
<tr><td rowspan="4">szilárd test</td><td>a struktúrát megtartja</td><td rowspan="4">van</td><td>megmarad</td></tr>
<tr><td>képlékeny folyás</td><td>a domének rendje megmarad, azon belül változik a rend</td></tr>
<tr><td>tészta (dagasztás)</td><td>nem marad meg</td></tr>
<tr><td>gumi típusú alakváltozás</td><td>a makromolekulákon belül a rend megmarad, de az egymáshoz viszonyított rend megváltozik</td></tr>
<tr><td colspan="2">szemcsehalmaz</td><td>van</td><td>nem marad meg</td></tr>
<tr><td rowspan="3">folyadék, viszkozitás</td><td>∞</td><td>van</td><td>megmarad</td></tr>
<tr><td>n</td><td>lassú változás</td><td>lassan változik</td></tr>
<tr><td>1</td><td>nincs</td><td>minden pillanatban újjáalakul</td></tr>
<tr><td colspan="2">gáz</td><td>nincs</td><td>nincs értelmezve</td></tr>
</table>

3. táblázat

A különböző mechanikai viselkedés – topológia megfogalmazás könnyen párhuzamba állítható. Igaz kétséges a gumi viselkedésének leírása, a makromolekulákban a másodlagos kötések újjrarendeződése, vagy a képlékeny folyás, a damaszkuszi penge, a tészta gyúrása. De a kulcsszó a rend, az egymással való érintkezés és ennek az érintkezésnek a megtartása. A kristályrács esetén nincs kérdés: van rend, meg is marad. A folyadék esete sem kérdéses, nincs rend, és ez a nem-rend meg is marad, azaz sose tudjuk, hogy mi is az atomok/molekulák sorrendje. Csak azt tudjuk, hogy a sorrendjük változik. Pl. egy edényben lévő molekulák egy „magasságban” egymás mellett vannak. Ha az edény alján kifolyik a folyadék, akkor ennek során az eredetileg egymás mellett lévő molekulák döntő többsége egymás alá-fölé kerül. A képlékeny folyás kissé nehezebb eset, a tésztadagasztásé még bonyolultabb. És a „csúcs”, szerintem, a toledói acél, a damaszkuszi penge és a szamuráj kard: kb. nyolcrét hajtott és újra kalapált, hevített anyag, amelyben utólag a rétegeket ki lehet mutatni, de a korábban külön álló részek szomszéddá, folytonossá, kapcsolt részekké váltak.

Azt gondolom, hogy az anyag viselkedésének pontos leírásához a benne fennálló, illetve megváltozó topológia rend megértése vezet.

A „legegyszerűbb" eset a topológia rend megléte és megőrzése. Ez ugyanis lehetővé teszi a folytonosságon alapuló matematikai apparátus alkalmazását. Ez vezet a klasszikus kontinuum fogalmához. De ez igen szűk területen alkalmazható: csak az abszolút szilárd testek és a befagyott folyadékok esetén használható. Sőt, van egy további korlátja: csak az igen kicsi (én 1/1000-re teszem) relatív megnyúlások esetén használható. Miért? Azért, mert a kis alakváltozás tenzora akkor és csak akkor értelmezhető, ha a relatív megnyúlás és a tényleges szögváltozás ekkora értékű. Sőt, a nagy alakváltozás tenzora nem is értelmezhető, mert a relatív megnyúláson és a szögváltozáson alapuló alakváltozási mennyiségek más és más matematikai függvényen (tört és trigonometrikus) alapulnak és azoknak a sorfejtése csak az első tagokban azonos. (További tagokat megtartva nem azonos a két Taylor-sor.) Ez a (matematikai) probléma talán nem is baj, hogy fennáll. Ugyanis nagy alakváltozás csak úgy jöhet létre, ha az atomi/molekuláris rend sérül. (Pl. képlékeny folyás, tésztagyúrás, gumi típusú alakváltozás.)

A másik, hasonlóan egyszerű eset a „száraz" víz, vagy kis mértékben viszkózus folyadékok esete. Ekkor ugyanis egy beágyazó térbeli mozgást vizsgálunk – mintha merev testet tanulmányoznánk az euklideszi térben. Mivel a beágyazó tér egy tartományában folyik a folyadék – maga a vizsgálat is –, ott alkalmazható a folytonos leírás. Igaz, az alakváltozás fogalmát kellő körültekintéssel kell alkalmazni folyás esetén, mert előfordulhat (koaxális hengerek, gömbök egyikének forgatása, miközben közöttük viszkózus folyadék van), hogy esetleg nincs is *globális* változás, nincs is *alak*változás.

Végezetül van még egy rendszer, amely tipikusan nem folytonos – a matematikának abban az értelmében, hogy nem kontinuum számosságú sok ponttal modellezzük –, és mégis alkalmazható egyfajta folytonos leírás. Ez a diszkrét, strukturált periodikus rendszer. Ekkor a diszkrét pontokban értelmezett állapothatározókat és állapotjellemzőket a beágyazó térben értelmezett folytonos függvények terében sorba fejtjük, és akkor jutunk a különféle mikropoláris és általánosított kontinuumok elméleteihez. (Ide soroljuk a direktorelméleteket is.)

Szemcsehalmazokról a topológia szempontjából általánosságban semmit sem lehet mondani. Pontosabban annyit, hogy a topológiai rendet folyamatosan ellenőrizni kell. Mert amíg egy polikristály esetén a topológiai rend – legalábbis a rugalmas és/vagy kis alakváltozások tartományában – automatikusan biztosított, addig a szemcsehalmaz attól szemcsehalmaz, hogy a szemcsék egymáson elcsúsznak, összetömörödnek, fellazulnak, egyes tartományok ékszerűen behatolnak más tartományok közé, vagy netán átboltozódnak, esetleg szabályosan összekeverednek. Azaz itt a szabály éppen az, hogy a topológia rend folyamatosan sérül, átszerveződik. A szemcsehalmaz esetén a folytonos leírásmód – függetlenül attól, hogy az a kontinuum, vagy az átlag fogalmán alapul – ellentétes a fizikai viselkedéssel. A véleményem az, hogy a szemcsehalmazra jellemző viselkedést alapvetően az egyedi elemek nyomon követésével lehet pontosan leírni.

Miután az anyagok viselkedését igyekeztünk matematikai, azon belül elsősorban topológiai megközelítést felhasználva jellemezni, kitérünk a topológia egy alapvető sajátosságára. Ez pedig az, hogy a topológia ponthalmazokkal foglakozik. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált elemeknek nincs méretük, a vizsgált elemek számossága kontinuum és azon belül – a topológia megadásával – egyfajta belső struktúrát, rendet rögzítettünk. És a topológia a ponthalmazok olyan leképezéseivel foglalkozik, amelyek során ez a rend nem változik, amelyek során ez a rend megmarad. És ezzel ellentétben a szemcsés közeg, de ha precízek akarnók lenni, akkor az anyag a maga atomi-molekuláris struktúrájával, nem ponthalmazként, hanem – a ponthalmazok nyelvezetét használva – (ponthalmazba ágyazott) zárt halmazok rendszereként írhatók le. A zárt halmazokra nézve a ponthalmazok topológiája közvetlenül nem alkalmazható, csak áttételesen, figyelembe véve a zárt halmazoknak a ponthalmazokétól eltérő tulajdonságait. A zárt halmazokra nézve is értelmezhető a szomszédság, de a kétféle halmaz között lényeges különbség van: amíg a ponthalmaz kontinuum számosságú, és ez a folytonosság értelmezésében jelentős, sőt döntő szerepet játszik, addig a szemcsehalmazok véges számosságúak, és a folytonosság a ponthalmazokban a megszokott (értsd: a ponthalmazban bevezetett) módon nem értelmezhető. A folytonosság csak a beágyazó tér felhasználásával „csempészhető" vissza a rendszerbe.

3. A klaszikus kontinuum kinematikájának a matematikai háttere

Ebben a pontban a klasszikus kontinuum kinematikájával foglakozunk: röviden áttekintjük annak matematikai hátteret, és ezt követve felvázoltuk a kinematikáját.

A kontinumnak egy Riemann-térben adott tartományt, vagy végtelenbe nyúló térrészt tekintünk. Klasszikus kontinuumról beszélünk, ha a Riemann-tér euklideszi. A Riemann-tér sokaságon alapul, amely olyan lokálisan euklideszi topológikus tér, amelyben bármely két pont elválasztható diszjunkt környezetekkel. A topológiai struktúra miatt a teret alkotó pontok méret nélküliek, azok egymáshoz viszonyított rendje változatlan. Azaz az alkalmazott matematikai struktúra – a Riemann-tér – legmélyebb rétegének, a topológiának a folyománya, hogy a (klasszikus) kontinuum kinematikai jellemzése az elemeinek – tehát pontoknak– az eltolódásával, és csak azzal történhet. A klasszikus kontinumban elfordulási szabadságfok a topológiai alapstruktúra miatt elméletileg nem értelmezhető.

Tehát a Riemann-tér az a matematikai struktúra, amelyet a kontinuum kinematikájának leírásához alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy ebben a térben van lehetőség a differenciál- és integrálszámítás bevezetésére, a távolság értelmezésére.

Az anyag matematikai modellezése során megköveteljük, hogy a fizikai viselkedés és matematikai modell összhangban legyenek. Ennek megfelelően egy test alakváltozása akkor írható le a klasszikus kontinuummal, ha a vizsgált test fizikai szempontból olyan, hogy a deformáció során a test belső, azaz atomi-molekuláris rendje változatlan marad – összhangban a topológiai rend megőrződésével.

Az alakváltozások értelmezéséhez a homogén alakváltozási állapotot tekintjük kiinduló fogalomnak. A homogén alakváltozás esetén relatív hosszváltozás és az abszolút szögváltozás értelmezhető, amely a homogenitás miatt minden pontban azonos. Megmutatható, hogy az alakváltozások értelmezéshez az szükséges, hogy maguk az alakváltozások – mint relatív hosszváltozás és az abszolút szögváltozás – legyenek kicsik, azaz maga a változás legyen az egy mellett elhanyagolható. A kicsinység lehetővé teszi, hogy a kétféle alakváltozás jó közelítéssel elkülöníthető legyen. A kicsinység arra is lehetőséget ad, hogy az alakváltozást, mint a testben kijelölt bármely (reguláris) ív fajlagos megváltozásával értelmezzük. Ez az alakváltozás globális értelmezése. Megmutatható, hogy ekkor az alakváltozás lokálisan a bázisvektorok hosszának, és az általuk bezárt szög változásának a kicsinységével egyenértékű, azaz lokálisan is kicsinek kell lennie az alakváltozásnak.

Az alakváltozások vizsgálata azt mutatja, hogy az eltolódásmező egyértelműen határozza meg minden pont (bármely kis) környezetének és minden vektornak az elfordulását. Azaz a klasszikus kontinuumban – az alakváltozások nagyságától függetlenül – az elfordulások nem függetlenek, azaz elfordulási szabadságfok a klasszikus kontinuumban nem értelmezhető ebből a szempontból sem.

A klasszikus kontinuumban az alakváltozási tenzor csak kis alakváltozások mellett értelmezhető. Már a kicsinél kissé nagyobb alakváltozásra sem adható meg tenzoriális jellemző. Ennek oka egyrészt a mérés módjában, másrészt az alakváltozásnak a méréshez kötött értelmezésében van. A hosszváltozással az alakváltozási tenzor főátlóbeli elemeit, a szögváltozással a mellékátlóbeli elemeit hozzuk kapcsolatba. A Riemann-térben a hosszváltozást négyzetgyökös kifejezéssel, a szögváltozást trigonometrikus és négyzetgyökös függvényekkel fejezzük ki. Ez a két függvény nem transzformálódik tenzorként, ellenben, azok sorfejtése esetén, az első tagok azonos összefüggésekre vezetnek. (Néhány további megszorítás mellett. Például a koordinátarendszer ortogonális kell, hogy legyen!) A sorfejtésnek, főleg, hogy lineáris közelítést alkalmazunk, az a feltétele, hogy valamely kis paraméter szerint fejtsünk sorba. A kis paraméter pedig éppen a relatív hosszváltozás, illetve az abszolút szögváltozás. Következésképpen mind fizikai, mind matematikai oldalról a klasszikus kontinuumban csak kis alakváltozások tenzora vezethető be, a nagy alakváltozás tenzora nem értelmezhető.

Végül pár szóban érintjük a kis alakváltozások tenzorának részleges linearizálását. Megmutatható, hogy a kis alakváltozások tenzora az eltolódásvektor gradiens tenzora komponenseinek négyzetes tagjait maradéktalanul kell tartalmaznia, ha az eltolódások nagyok. Részleges linearizálás esetén az eltolódások csak korlátozottan lehetnek nagyok, míg linearizált alakváltozási tenzor csak kis eltolódások esetén alkalmazható. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy attól, mert az alakváltozási tenzor az eltolódásvektor gradiens tenzora komponenseinek négyzetes tagjait maradéktalanul tartalmazza, még nem jelenti azt, hogy az alakváltozási tenzor nagy alakváltozásokra vonatkozik; mint már említettük, ekkor az alakváltozások kicsik, csak az eltolódások lehetnek nagyok (is).

4. A rácskontinuum kinematikájának a matematikai háttere

- Legyen adott egy háromdimenziós periodikus rácshálózat,
- legyen adott egy, a hálózat csomópontjaiban ülő merev test, vagy
- legyen adott néhány, eltérő geometriájú merev test, és azok periodikus mintázata a hálózat csomópontjaiban,
- legyenek adottak a csomópontokban ülő merev testek közötti kapcsolatok lokalitása, azaz annak rendje, hogy egy elemnek az eltolódása és elfordulása során hányadik szomszédok „érzékelik” az elmozdulást,
- legyenek adottak a csomópontokban ülő merev testek relatív elmozdulásából (eltolódásából és elfordulásából) létrejövő belső dinám (erők és nyomatékok) karakterisztikái az elmozdulás függvényében,
- legyenek a rácsállandók a rácshálózat befoglaló méretei közül a legkisebbhez viszonyítva is elhanyagolhatók.

Ekkor *diszkrét, periodikusan strukturált rendszerről* beszélünk, a csomópontokban ülő merev testeket *elemeknek* nevezzük.

A rácskontinuum kinematikai leírását a következők határozzák meg.

1. A periodikusan strukturált rendszer értelmezésénél megadott kinematikai paraméterek, tehát, hogy a rácspontokban ülő elemeknek milyen kinematikai szabadságfokuk van (eltolódás és/vagy elfordulás).
2. A lokalitás mértéke.
3. A cellák egyszerű, vagy összetett volta.
4. A sorfejtésben megtartott elemek száma, típusa (lassú és gyors oszcilláció).

Ezekhez az alábbi megjegyzéseket, magyarázatokat fűzzük. Ahhoz, hogy az elfordulási szabadságfokkal rendelkező rácskontinuumot értelmezhessünk, az szükséges, hogy

- egyszerű cella esetén az elemek rendelkezzenek az elfordulási szabadságfokkal,
- összetett cellaként értelmezzük a rendszert, ekkor az elemek önálló elfordulási szabadságfokára nincs is szükség.

Ki kell hangsúlyozni, hogy mindkét esetben az szükséges, hogy a rendszer diszkrét legyen.

A lokalitás a kinematikai szabadságfokok számát nem befolyásolja. Hatása az elmozdulás (eltolódás-elfordulás) – dinám (erő és nyomaték) összefüggés meghatározásában van.

A cellák összetett volta értelmezi az egyes merev testek elfordulási szabadságfokán túl a belső szabadságfokokat. Ez összevethető a rúdszerkezetek elméletében, és a végeselem analízisben alkalmazott alszerkezetek módszerével, amelyben először egy-egy alszerkezet határpontjainak a viselkedését a belső pontok viselkedésével fejezzük ki, ezeket, mint ismeretleneket kiküszöböljük a rendszer egészéből, és az alszerkezetek érintkező határpontjainak a szabadságfokai függvényében vizsgáljuk a rendszer egészét. A rácskontinuum esetén az összetett cella egy kijelölt (többnyire a súly-) pontjára vonatkoztatjuk a cella szabadságfokait, azaz a bázispontnak az eltolódását, elfordulását, illetve a bázisponthoz viszonyítva az összetett cella különböző konfigurációinak a változását tekintjük a bázispontban a rácskontinuum belső kinematikai szabadságfokainak. Az analógia itt megszűnik, mert amíg az alszerkezetek módszerében a folytonosság megkövetelése az alszerkezetek érintkezési pontjaiban (amelyek fizikailag azonosak) adja a rendszer egészére vonatkozó állapothatározó egyenleteket, addig a rácskontinuumban a folytonosság automatikusan teljesül – nem vágtuk részekre a rendszert –, ellenben a különböző konfigurációkhoz tartózó belső erőket kell előzetesen parametrizálni, és a bázispontra vonatkoztatott dinamikai változóval kifejezni a rendszer egyensúlyát, illetve mozgását. Sőt, ha az elemek eltoldódására nézve folytonosságot követelünk meg – a gyorsan oszcilláló tagokat kizárjuk a vizsgálatból – akkor magát a diszkrét jelenséget iktatjuk ki a rendszerből.

Mint arra fentebb rámutattunk, igazából nem a sorfejtésben megtartott elemek számától függ a kinematikai szabadságfok jellege, hanem az oszcillálás gyorsaságától. A lassan oszcilláló megoldás a folytonos megoldást modellezi, a gyorsan oszcilláló a diszkrét megoldást. Azaz, ha csak a lassan oszcilláló komponenst tartjuk meg, akkor egyszerűen megszüntetjük a rendszer diszkrét tulajdonságait, nincs mód arra, hogy abban a közelítésben a rácskontinuum diszkrét viselkedését írja le. A lassan oszcilláló, illetve a többféle karakterisztikus távolsággal (hullámhosszal) oszcilláló tagokra van szükség ahhoz, hogy a modell a diszkrét jellegzetességet visszatükrözze.

Hangsúlyozni kell, hogy a belső szabadságfokot egyszerű rendszer esetén az eredendően definiált elfordulási szabadságfok, vagy összetett rendszer esetén az összetett cella egy pontjához rendelt „belső” szabadságfokai biztosítják. A többféle karakterisztikus távolság (azaz a különböző a bázisfüggvény) és a nemlokalitás különböző járulékokat adnak, azok nagyságrendjét rendszerről rendszerre vizsgálni szükséges.

Néhány szóban áttekintjük a folytonosság – diszkrétség kérdését a rácskontinuumban. Miről is van szó? Arról, hogy másképpen viselkednek a kontinuum pontjai és másképpen egy diszkrét, periodikusan strukturált rendszer csomópontjaiban ülő merev testek. Először nézzük az eltolódást. A kontinuum – mint folytonos ponthalmaz – azzal jellemezhető, hogy egy pont környezetében folytonos minden, azaz ha egy pontja egy irányban eltolódik, akkor annak a pontnak az egész környezete is ugyanabba az irányba, ugyanazzal az értékkel mozdul el. Lehet, hogy van némi eltérés a környezet egyik, illetve a másik végén lévő pontok eltolódása között, de ez az eltérés a folytonosság megkövetelése miatt elenyésző, ha maga a környezet kicsi. A rácskontinuum – mint diszkrét rendszer – azzal jellemezhető, hogy két szomszédos pont nem feltételen kell, hogy közel ugyanabba az irányba, közel ugyanazon nagyságú eltolódást végezzen. Mozdulhatnak kissé eltérő irányba, kissé eltérő nagyággal. Sőt lehet, hogy az egyik elmozdul, a másik nem, vagy mindkettő, de egymás felé, vagy egymástól mozdul el. És ez az, ami a diszkrét rendszert, tehát például a kristályrácsokat jellemzi. Ez ugyanis a rácsok rezgésének az optikai ága, míg a közel kollektív, azaz a kontinuális rezgés adja az akusztikus ágat. Hasonló megjegyzések tehetők az elfordulási szabadságfokkal kapcsolatban is. És ez a fejtegetés két dologra is felhívja figyelmet. Az egyik, hogy attól, mert áttérünk egy diszkrét rendszerről a rácskontinuumra, azaz egy folytonos leírásra, a rendszer fizikai szempontból még mindig diszkrét marad. A másik, hogy elképzelhető, hogy az áttérés során elveszik a diszkrét karakter. Ahhoz, hogy az megmaradjon, elvben elegendően sok tagot kell a sorfejtésben megtartani, a gyakorlatban azokat a gyorsan oszcilláló tagokat kell megtartani, amelyek éppen a diszkrét jelleget tükrözik vissza. Megjegyezzük, általában azért térünk át a folytonos modellezésre, mert a diszkrét jelleg nem dominál, azaz elhanyagolható.

5. A szemcsehalmazok kinematikájának a matematikai háttere

A szemcsehalmazt szilárd, oválisnak tekinthető merev testek halmazaként értelmezzük. A szemcsék pontokban érintkeznek, a szemcsék között az érintkezési pontban az érintkező felületek közös normális irányába esik a kapcsolati erő. Feltesszük, hogy súrlódás nem lép fel, valamint, hogy csak nyomóerő ébred a szemcsék között. Ezen feltevések mellett megmutatható, hogy egy oválisra ható három erő három erővel egyensúlyozható. Ugyanakkor megmutatható az is, hogy ez esetben a három erőhöz tetszőleges pontban nem lehet felvenni a három „támaszpontot”; magyarán a támaszpontok helye és a támaszerők nagysága egyaránt ismeretlen az egyensúlyi állapot meghatározása során. Ez azt jelenti, hogy az egyensúly beállásához egy-egy szemcsének addig kell forognia a többi szeme között, hogy elérje azt a helyzetet, amelyben a rá ható erők egyensúlyozhatók. Azaz a száraz, „ragasztó nélküli”, súrlódásmentes, közel izometrikus és közel azonos nagyságú szemcsék halmazában az egyensúly kialakulásához a szemcséknek forogniuk kell. De ez a forgás nem folytonos, két szomszédos szemcse éppenséggel ellentétes irányba is foroghat.

A fenti állítás bizonyítása túlmenne a jelen előadás keretén.

Meg kell jegyezni, hogy a közel azonos nagyságú szemcsék esetén egy szemcse a geometriából adódóan három szemcsére támaszkodik fel, tehát a kiinduló hipotézis megalapozott. Az viszont tény, hogy nyújtott szemeloszlás esetén (a legkisebb és a legnagyobb szemcsék átmérőinek az aránya a 10-et is eléri, vagy meghaladja) a modell további vizsgálatra szorul, bár az elv változatlan. A folyadék, esetleg más „ragasztó” jelenléte esetén a szemcsehalmaz cementálódik, és kontinuumként viselkedik, azaz az elfordulási szabadságfok befagy; tehát a szemcsehalmaz értelmezéséhez a szemcséknek az egymáshoz viszonyított „szabad” elmozdulásának képességére szükség van. Végül a súrlódást kell megvizsgálni. Az nem tagadható, hogy súrlódás száraz szemcsék között is fellép. Ugyanakkor a gördülési súrlódás elenyésző, tehát attól a szemcsék elfordulása létre jöhet. Általában elcsúszásra is szükség van az egyensúlyi helyzet kialakulásához, ezért a súrlódás bizonyos, hogy fellép, és vélhető nem elhanyagolható szerepet játszik a száraz szemcsehalmaz erőjátékában. Az világos, hogy az erőhatások közvetlen környezetében a súrlódás nem játszik szerepet, a halmaz mélyebb rétegeiben, ahol már jelentős oldalirányú nyomás lép fel, ott esetleg az egyensúly létrejöhet a szemcsék elfordulása nélkül is. Azt, hogy ez vélhetően így van, a homokos kavicstalaj tömörítése során a tapasztalatból tudjuk: a tömörítés hatékonyságának van egy határmélysége; az alatt nem tömörödik a talaj még akkor sem, ha elméletileg tömöríthető lenne.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Az előadásban az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdéseit vizsgáltuk. Először a különböző alakváltozási mechanizmusok fizikai és matematikai leírását adtuk meg. Ehhez néhány egyszerű kísérletet vettünk alapul, mint síklapra tevés, lyukfúrás, helyi nyomás, rázás, hajtogatás. Ezen kísérletek segítségével a hagyományos szilárd, folyadék, gáznemű testeken túl jól elkülöníthetően viselkedik a szemcsehalmaz, de a szilárd és a folyékony is további jól elkülöníthető csoportokra osztható. Megmutattuk, hogy az egyes eltérő viselkedés mögött az anyagon belüli rend megmaradásának a különböző típusai találhatók. Ezt követően röviden jellemeztük a klasszikus kontinuumot, a rácskontinuumot és a szemcsehalmazokat. Ezen belül megmutattuk, hogy a kollektív viselkedés és a rend megmaradása egyértelműen elkülöníti az egyes viselkedési típusokat. A kontinuum kinematikája a pontok kollektív viselkedéssel jellemezhető, ezzel együtt és ezzel összhangban a belső rend megmarad; a forgás önálló szabadságfokként nem értelmezhető. A rácskontinuum kinematikája egyszerre jellemezhető kollektív és egyedi viselkedéssel, az első jellemző a kontinuumra, a második csak a rácskontinuumra. Mindemellett a belső rend (a rács hálózata, ezzel együtt az elemek sorrendje, egymásutánisága) megmarad. A forgás mint kinematikai szabadságfok értelmezhető – kétféleképpen. Vagy az egyes elemek önmagukban fordulnak el, vagy összetett cellát értelmezve annak a referenciapontjára vonatkoztatva csoportos kinematikai szabadságfokok között jelenik meg az elfordulás, mint önálló szabadság fok. Fontos hangsúlyozni, hogy maga a rendszer diszkrét, ezt legjobban a modellben szereplő elemek száma (véges), és az egyedi, egymással szembe mozgó szomszédos részecskék mutatják. A szemcsehalmaz befeszült állapotban viselkedhet kontinuumhoz hasonlóan, azaz az erőhatás alatt kialakult rend ekkor megmarad. Ekkor a kötött érintkezési pontok miatt a szemcse elfordulása nem független kinematikai szabadságfok. A szemcsehalmaznak olyan egyedi mozgása, amelyben a rend megmarad, de a szemcsék egyedi mozgást, forgást végeznek, nem értelmezhető. Amennyiben a szemcsehalmazban a szemcsék elfordulása valóban érezteti a hatás, akkor a rend nem marad meg, hanem a halmaz részlegesen, vagy teljes mértékben átrendeződik. Ekkor a szemcsehalmaz diszkrét viselkedést mutat.

Hivatkozások

[1] Bach, C.: *Elastizitat und Festigkeit* 7. Auflage Spinger, Berlin 1917.

[2] Bell, D.F.: *Experimental Foundations*. In: Encyclopedia of Physics. Ch. Ed.: S. Flügye. vol VIa/1. Mechanics of solids I. Ed: C. Truesdell. Springer, Berlin/Heidelberg/ New York, 1973.

[3] Беляев, Н.М.: *Лабораторные работы по сопротивлению материалов*. 6ое изд. ГИИТЛ, МОСКВА, 1956.

[4] Budo Á.: *Kísérleti fizika I*. 4. kiadás Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

[5] Császár A.: *Általános topológia*. Akadémia Kiadó, Budapest, 1970.

[6] Eringen, A.C.: *Theory of Micropolar Elastcity in Fructure*. An Advenced Treatise. vol. II. Academic Press, New York, 1968.

[7] Eringen, A.C.: *Foundations of Micropolar Thermoelasticity*. Udine, 1970 Springer, Wien/New York, 1970.

[8] Eringen, A.C.: *Microcontinuum Field Theories*. Springer, New York, Berlin/Heidelberg, 1998.
[9] Gombás P., Kisdi D.: *Bevezetés az elméleti fizikába*. 2. kötet. Akadémia kiadó, Budapest, 1971.
[10] Horváth J.: *Termodinamika és statisztikai mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
[11] Kalmár L.: *A matematika alapjai. I. kötet*, 1-2. füzet. Tankönyvkiadó, Bp. 1975.
[12] Кунин, И.А.: *Теория упругих сред с микроструктурой*. Наука, Москва, 1975.
[13] Lámer G.: *Contradictions in the Theory of Micropolar Elasticity and Their Causes.* Newsletter, Techn, Univ. of Budapest, **II** (1), 1984. pp. 12-16
[14] Lámer G.: *Differential Geometry, as Mathematical Background of Continuum Physics.* Newsletter, Techn. Univ. of Budapest, **II** (3), 1984. pp. 17-21
[15] Lámer G.: *On Continuous and Discrete Mechanical Systems*. Newsletter, Techn. Univ of Budapest, **III** (3), 1985. pp. 12-15
[16] Lámer G.: *Az anyag strukturáltsága és annak visszatükröződése a szerkezetek és a folyadékok mechanikájának matematikai modelljein*. Magyarok szerepe a világ természettudományos és műszaki haladásában. Tudományos találkozó 1986. Előadások kivonatai, Budapest, 1986. I. kötet pp. 277-281
[17] Lámer G.: *Folytonos és diszkrét modellek a kontinuummechanikában és a termodinamikában*. In: Termodinamikai előadások. Szerk.: Lámer G., Eötvös L. Fiz. Társ., Budapest, 1994. pp. 76-81
[18] Lámer, G.: *Solid and Soft Body With and Without Structure*. In: Quasi-static deformations of particular materials. Proc. QuaDMP'03 Workshop. 25-28 august 2003. Ed.: K. Bagi. P. Co. of BTU, Budapest, 2003. pp. 159-166
[19] Lámer G.: *Symmetry and Asymmetry, or Regularity and Irregularity in the Force Distribution in the Heaped Bodies*. Culture and Science. (előkészületben)
[20] Ломакин, В.А.: *Теория упругости неоднородных тел*. Изд. МГУ, Москва, 1976.
[21] *Matematikai kislexikon*. Szerk.: Farkas M. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1977.
[22] *Modern fizikai kisenciklopédia*. Szerk.: Fényes I. Gondolat, Budapest, 1971.
[23] Nowacky, W.: *Theory of Micropolar Elasticity*. Udine 1970. Springer, Wien/New York.
[24] Новацкий, В.: *Теория упругости*. МИР, Москва, 1975.
[25] Рашевский, М.К.: *Риманова геометрия и тензорный анализ*. Наука, Москва, 1967. pp.
[26] Saposnyikov, N.J.: *Fémek mechanikai vizsgálata*. Nehézipari Könyv- és folyóiratkiadó Vállalat, 1952.
[27] Schwartz, L.: *Analyse mathematique*. Hermann, Paris, 1967.
[28] Шермергор, Т.Д.: *Теория упругости микронеоднородных тел*. Наука, Москва, 1977.
[29] Tamm Fr. (szerk.) *A szilárdságtan kísérleti módszerei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
[30] Truesdell, C., Noll, W.: *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. In: Encyclopaedia of Physics. Chief ed: S. Flügge. Vol. III/3. Springer-Verlag, Berlin, 1965.